



# Realização de Redes Heteroclínicas Uniformes e Quase-completas

Jorge Paiva Soares

Tese submetida à Faculdade de Ciências da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Matemática - Especialização em Estatística e em Probabilidades

Departamento de Matemática

Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

setembro/2020



# Agradecimentos

Agradeço a todos os que me mostraram caminhos, especialmente ao orientador Prof. Dr. Alexandre Rodrigues pelo apoio, disponibilidade e empenho durante a realização desta tese. Este trabalho só foi possível devido à sua capacidade de explicar com simplicidade conceitos complexos.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, em especial ao Cláudio, à Carla e ao Jorge, todo o apoio e suporte que me deram logo que cheguei à Universidade.

Ao Edmilson Correia, sou muito grato pela ajuda que me deu em Cabo Verde no preenchimento dos formulários e nos documentos necessários para o pedido de visto, e em Portugal por ter me ajudado a encontrar uma casa com preço de aluguer baixo. E ainda por todos os conselhos e pela força que me deu na hora que mais precisei,... enfim, um irmão que Deus colocou no meu caminho.

Agradeço ao João José Rodrigues, um companheiro de todas as horas, pois fizemos praticamente o mesmo percurso académico e profissional, desde o curso de Bacharel e mais tarde a Licenciatura. Começamos a nossa vida profissional no mesmo estabelecimento de ensino e, por pouco, não optamos pelo mesmo curso de Mestrado. Foi devido à minha influência que ele decidiu fazer a Licenciatura e depois o papel inverteu-se no Mestrado. De facto, ele foi muito importante nesse processo, pela informação e motivação que me transmitiu, desde a minha candidatura para a bolsa de estudo, uma vez que ele já tinha passado pelo mesmo processo um ano antes, até aos dias de hoje.

À Prof<sup>a</sup>. Ana Santos, agradeço pela ajuda que me deu na correção ortográfica desta tese.

Agradeço também ao antigo Diretor de Mestrado em Matemática, Prof. Dr. Jorge Rocha, pela ajuda que me deu desde Cabo Verde até à chegada em Portugal.

Ao Camões, I.P., agradeço uma vez mais pela oportunidade que me deram em tornar o meu sonho uma realidade.



# Resumo

Nesta tese, explicitam-se os passos de construção de um campo de vetores que realiza um dado dígrafo  $\Sigma$  (sem 1, 2-ciclos nem  $\Delta$ -cliques). Noutros termos, constrói-se um campo de vetores que possui uma rede heteroclínica atratora, cujo dígrafo associado é  $\Sigma$ . O fluxo associado ao campo de vetores possui uma rede  $\Sigma' \supset \Sigma$ , que é quase-completa, em que as variedades instáveis de todos os nós da rede estão em  $\Sigma'$ . A construção de  $\Sigma'$  é feita adicionando pontos de equilíbrio extra que capturam as variedades instáveis dos nós, cujas variedades instáveis fogem de  $\Sigma$ . A construção será ilustrada com um exemplo de uma rede heteroclínica bem conhecida, a rede Kirk-Silber, que, para ser realizada de forma consistente, precisa de um nó extra adicional. Verifica-se, assim, que o método de construção é consistente com os resultados já existentes na literatura.

Introduzindo um processo Markoviano, prova-se ainda a existência de uma sub-rede  $\Sigma'' \subset \Sigma'$ , que “funciona” como atrator estatístico: quase todas as trajetórias (com respeito à medida de Lebesgue) são atraídas para  $\Sigma''$ . Serão descritos ainda algumas simulações numéricas levadas a cabo por Ashwin et al. [6], *Journal of Nonlinear Science* (2020) que sugerem a existência de uma rede (quase-completa e uniforme) como uma descrição ótima para (pequenas) perturbações estocásticas do sistema determinístico original.

Palavras-chave: Ciclo heteroclínico, rede heteroclínica, dígrafo, realização de um dígrafo.



# Abstract

In this thesis, the construction steps of a vector field that performs a given digraph  $\Sigma$  (with no 1, 2-cycles or  $\Delta$ -cliques) are explained. In other words, a vector field that has an attracting heteroclinic network is constructed, whose associated digraph is  $\Sigma$ . The flow associated with the vector field has a network  $\Sigma' \supset \Sigma$ , which is almost complete, in which the unstable manifolds of all nodes in the network are in  $\Sigma'$ . The construction of  $\Sigma'$  is done by adding extra equilibrium points that capture the unstable manifolds of nodes, whose unstable manifolds run away from  $\Sigma$ . The construction will be illustrated with an example of a well-known heteroclinic network, the Kirk-Silber network, which in order to be carried out consistently, needs an additional extra node. It appears that the construction method is consistent with previous results in the literature. Introducing a Markovian process, it's proven there is still a subnetwork  $\Sigma'' \subset \Sigma'$  which “works” as a statistical attractor: almost all trajectories (with respect to the Lebesgue measure) are attracted to  $\Sigma''$ . Some numerical simulations carried out by Ashwin et al. [6], Journal of Nonlinear Science (2020) that suggest the existence of a (almost-complete and equable) network as an optimal description for (small) stochastic disturbances of the original deterministic system will also be described.

Keywords: Heteroclinic cycle, heteroclinic network, digraph, digraph realization.



# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>5</b>
2.1	Sistemas de Equações Diferenciais . . . . .	5
2.1.1	Conjuntos Invariantes pelo Fluxo . . . . .	6
2.1.2	Pontos de Equilíbrio e sua Estabilidade . . . . .	6
2.2	Simetrias de Equações Diferenciais . . . . .	9
2.2.1	Teoria de Grupos . . . . .	10
2.2.2	Subespaços de Pontos Fixos . . . . .	11
2.2.3	Funções Equivariantes . . . . .	12
2.3	Fluxo Morse-Smale e relação com o Fluxo Gradiente . . . . .	12
2.4	Medida de Lebesgue . . . . .	13
2.5	Grafos . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Ciclos e Redes Heteroclínicas</b>	<b>17</b>
3.1	Conjuntos $\omega$ e $\alpha$ limite . . . . .	17
3.2	Conjuntos Estável e Instável de um Compacto Invariante . . . . .	18
3.3	Ciclo e Rede Heteroclínicas . . . . .	19
3.3.1	Estabilidade Estrutural . . . . .	22
3.3.2	Estabilidade Assintótica . . . . .	23
3.4	Redes Heteroclínicas e Dígrafos . . . . .	24
3.4.1	Rede Indecomponível e Dígrafo Transitivo . . . . .	24
3.4.2	$\Delta$ -Clique, Vértice de Divisão e Nó de Divisão . . . . .	26
3.4.3	Propriedades dos Nós das Redes Heteroclínicas . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Realização de Redes Heteroclínicas Quase-completas</b>	<b>29</b>
<b>5</b>	<b>Rede Kirk-Silber: Exemplo</b>	<b>39</b>
5.1	Descrição da Rede Kirk-Silber . . . . .	39
5.2	Aplicação do Teorema 4.2 . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Abordagem Probabilística da Dinâmica da Rede</b>	<b>45</b>
6.1	Processo de Markov na Rede . . . . .	45
6.2	Dinâmica Estocástica: Breve Abordagem . . . . .	47

<b>7</b>	<b>Discussão</b>	<b>49</b>
<b>8</b>	<b>Bibliografia</b>	<b>51</b>

# Lista de Figuras

2.1	Ilustração de três pontos de equilíbrio: (i) estável, (ii) assintoticamente estável e (iii) instável. . . . .	7
2.2	Ilustração de foco: (i) estável, (ii) instável (a direção da seta descreve a evolução de posição em função do tempo). . . . .	8
2.3	Exemplo de três pontos de equilíbrio: (i) poço, (ii) fonte e (iii) sela. . . . .	8
2.4	Exemplo de três diagramas de fase de sistemas topologicamente equivalentes. . . . .	9
2.5	Exemplo de um sistema Morse-Smale, onde $x_0, x_1, x_2$ e $x_3$ representam órbitas periódicas. . . . .	13
2.6	(i) Ilustração de um grafo simples. (ii) Ilustração de um dígrafo ou grafo orientado. . . . .	15
3.1	Ilustração de variedades instável $W^u(x_0)$ e estável $W^s(x_0)$ de um ponto de sela $x_0$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	19
3.2	(i) Exemplo do dígrafo associado a um ciclo heteroclínico. (ii) Exemplo do dígrafo associado a um ciclo heteroclínico com múltiplas ligações. . . . .	19
3.3	Exemplo do dígrafo associado a uma rede heteroclínica. . . . .	21
3.4	Diagrama de fase do sistema $\mathbb{Z}_2(\langle\sigma\rangle)$ -equivariante (não perturbado) (Field [15]). . . . .	23
3.5	Possível diagrama de fase do sistema $\mathbb{Z}_2(\langle\sigma\rangle)$ -não equivariante (Field [15]). . . . .	23
3.6	Exemplo de uma rede indecomponível ( $n = 9$ ). . . . .	25
3.7	(i) Triângulo transitivo. (ii) $\Delta$ -clique. . . . .	26
3.8	Exemplo de um vértice de divisão ( $w$ ). . . . .	26
3.9	(i) Nó completo ( $\xi_4$ ) em $\Sigma$ . (ii) Nó não completo ( $\xi_4$ ) em $\Sigma$ . . . . .	27
3.10	(i) Nó uniforme e exclusivo ( $\xi_k$ ). (ii) Nó não uniforme e não exclusivo ( $\xi_k$ ). . . . .	28
4.1	Ilustração de região absorvente em $\mathbb{R}^n$ : com exceção de origem, todas as trajetórias são atraídas para esta região. . . . .	32
4.2	Subespaço vetorial invariante $\Omega_j$ gerado pelos eixos coordenados que não recebem ligação de $O_j$ . As setas não representam direção de saída do fluxo. . . . .	33
5.1	Dígrafo associado à rede Kirk-Silber [20]. . . . .	39
5.2	(i), (ii) Ilustração dos ciclos $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ da rede Kirk-Silber nos planos coordenados $x_4 = 0$ e $x_3 = 0$ , respectivamente. . . . .	40

- 5.3 (i) Dinâmica no plano  $x_1 = x_2 = 0$ , envolvendo um ponto de equilíbrio de sela  $\zeta$ , com  $\dim(W^u(\zeta)) = 2$ . (ii) Rede heteroclínica fechada topologicamente que contém os dois ciclos,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Os números entre parênteses correspondem à **dimensão da conexão** quando esta é maior que um. . . . . 41
- 5.4 Dígrafo associado à rede Kirk-Silber, após a inserção de um nó extra,  $\zeta$ , de forma a torná-la quase-completa. . . . . 41
- 5.5 Esquematização de um plausível diagrama de fase. . . . . 44

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de redes heteroclínicas pode ser visto como o centro organizador para a compreensão de dinâmicas complexas. Estudos recentes enfatizaram os modos como estas estruturas heteroclínicas são responsáveis por comportamento intermitente em sistemas autônomos não lineares. Aparecem em vários modelos dinâmicos de processos biológicos e cognitivos, por exemplo, na competição de espécies em ecossistemas (Rabinovich et al. [24]) e dinâmica neuronal (Komarov et al. [21]).

Ciclos e redes heteroclínicas podem ser representados esquematicamente por dígrafos transitivos e muitas propriedades de redes podem ser extraídas a partir do dígrafo associado, por exemplo, “switching” (Aguilar et al. [2]).

Na tentativa de entender propriedades gerais de redes heteroclínicas, Ashwin & Postlethwaite [9, 10] sugerem que o problema de realizar um dado dígrafo como uma rede heteroclínica é de interesse e tem aplicabilidade. Em Ashwin & Postlethwaite [10], são apresentados dois métodos para mostrar que, sob premissas mínimas, um dígrafo  $G$  pode ser realizado como uma rede heteroclínica. O **método simplexo** incorpora o dígrafo num simplexo, colocando as selas da rede (nós) nos eixos coordenados. Este método realiza o dígrafo, desde que não tenha 1 nem 2-ciclos. O **método do cilindro** coloca as selas da rede ao longo de um eixo coordenado e realiza qualquer dígrafo, desde que não tenha 1-ciclos.

Com base no artigo de Field [14], qualquer dígrafo conexo  $G$ , sem 1-ciclos pode ser realizado como uma rede heteroclínica robusta  $\Sigma$  para um sistema de células acopladas. O campo de vetores resultante é  $\mathbb{Z}_2$ -equivariante e as variedades instáveis dos nós da rede têm a mesma dimensão ( $\Sigma$  é homogênea). Os equilíbrios hiperbólicos pertencem aos subespaços de pontos fixos. Esta construção tem alguma semelhança formal com aquela que é feita em Ashwin & Postlethwaite [10], usando o método cilindro.

Em Ashwin & Postlethwaite [9], apresenta-se um método construtivo para realizar um dígrafo arbitrário (sem 1-ciclo) como uma rede heteroclínica excitável, definido no espaço de fase de um sistema de células acopladas de dois tipos. Um dos tipos de células (as células  $p$ ) interage por inibição mútua e classifica em que vértice (estado) estamos atualmente próximos, enquanto o outro tipo de célula (as células  $y$ ) excita seletivamente as células  $p$  e torna-se ativo

somente quando há uma transição entre vértices. Ainda no artigo de Ashwin & Postlethwaite [9], exibem-se conjuntos abertos de parâmetros para a existência das redes. Demonstra-se, por simulação numérica, que elas podem ser atratoras para parâmetros escolhidos adequadamente. Além disso, identifica-se uma bifurcação de uma rede heteroclínica para uma rede excitável ao alterar um único parâmetro. No caso da rede heteroclínica, os vértices são equilíbrios de sela e as conexões são heteroclínicas. E, no caso da rede excitável, os vértices correspondem a equilíbrios estáveis na rede que são sensíveis a perturbações nas direções correspondentes às arestas no dígrafo.

Em Field [16], mostram-se resultados que permitem a realização de uma grande classe de dígrafos como redes heteroclínicas robustas em sistemas celulares idênticos acoplados. Os principais resultados descrevem uma correspondência entre classes de redes heteroclínicas em sistemas simétricos e em sistemas celulares acoplados. A ênfase está na estrutura e não na construção detalhada de campo de vetores da rede que realiza rede heteroclínica. Segundo Field [16], uma rede heteroclínica é chamada de **limpa** se for compacta e igual à união das variedades instáveis de seus pontos de equilíbrio (completa). A noção de completude está relacionada com a possibilidade da rede ser visível como um atrator: na verdade, é necessário que uma rede seja limpa/completa para que seja assintoticamente estável (Podvigina et al. [23]).

Bick [12] prova a existência de ciclos heteroclínicos robustos entre conjuntos invariantes com sincronia de frequência localizada em redes de osciladores de pequena fase com interações de ordem superior. Os resultados obtidos são do interesse de várias perspectivas. Primeiro, mostram como a interação da estrutura de rede e as interações funcionais entre as unidades dão origem à dinâmica heteroclínica nas redes de osciladores de fase: relaciona-se explicitamente os parâmetros de acoplamento da rede à existência de ciclos heteroclínicos. Segundo, os resultados destacam como as interações de rede de ordem superior moldam a dinâmica da rede (global). Finalmente, os resultados fornecem novos exemplos de ciclos heteroclínicos em sistemas dinâmicos de redes relevantes para aplicações. Esses exemplos mostram a existência de ciclos heteroclínicos entre padrões localizados de sincronia de frequência em redes que consistem em três populações de dois osciladores e redes com três populações de três osciladores.

Até Ashwin, Castro & Lohse [6], as abordagens para a realização de um dígrafo como uma rede heteroclínica resultam geralmente em estruturas que não são assintoticamente estáveis e que não contêm as variedades instáveis de todas as selas (isto é, as redes não são limpas). Os autores de [6] resolvem este problema e dão um método “algorítmico” para a construção de uma rede heteroclínica estável.

Com base no artigo de Ashwin et al. [6], constrói-se um campo de vetores cujo fluxo possui uma rede heteroclínica atratora associada ao dígrafo dado. Apresentam-se conceitos, resultados e exemplos que esclarecem a estrutura e a dinâmica das redes heteroclínicas, mostrando que, embora normalmente não se possam realizar dígrafos arbitrários como redes heteroclínicas limpas, pode-se alcançar quase a totalidade desses dígrafos e, além disso, assegura a uniformidade de todos os equilíbrios da rede.

A tese está organizada do seguinte modo:

- No capítulo 2, apresentam-se definições e resultados básicos sobre equações diferenciais, simetrias, teoria de grupos, fluxos, medida de Lebesgue e grafos.
- No capítulo 3, discute-se a relação entre dígrafos, ciclos e redes heteroclínicas, introduzindo as propriedades de nós e redes completas, quase-completas, uniformes, exclusivas e limpas, e ilustram-se algumas definições com exemplos. Também se define a estabilidade estrutural e a estabilidade assintótica.
- No capítulo 4, com o Teorema 4.2, mostra-se a construção de um campo de vetores que realiza uma classe de dígrafos como uma rede heteroclínica uniforme e quase-completa que faz parte de uma rede fechada maior.
- No capítulo 5, dá-se um exemplo (rede Kirk-Silber) que esclarece e ilustra os resultados e conceitos do capítulo 4.
- No capítulo 6, apresenta-se um modelo de dinâmicas probabilísticas com perturbação na rede heteroclínica. Para este modelo, as trajetórias típicas exploram apenas uma sub-rede uniforme e quase-completa. Nesse sentido, a sub-rede uniforme e quase-completa pode ser vista como uma realização satisfatória da rede com ruído adicional.
- No capítulo 7, discutem-se os resultados obtidos, as suas limitações e levantam-se algumas questões que ainda permanecem em aberto e que serão alvo de investigação em trabalhos futuros.



# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1 Sistemas de Equações Diferenciais

Neste trabalho, serão estudados sistemas dinâmicos contínuos que, em geral, são descritos por equações diferenciais. De seguida, serão introduzidos alguns conceitos básicos a serem utilizados ao longo desta tese, começando pela definição de sistema de equações diferenciais (ordinárias e autónomas). O conteúdo desta primeira secção segue de perto Arnold [5], Hirsch & Smale [18] e Rodrigues [26].

**Definição 2.1** Um sistema de equações diferenciais ordinárias é um sistema da forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (2.1)$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $C^\infty$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Daqui em diante, vai-se denotar  $\frac{dx}{dt}$  por  $\dot{x}$ .

Nesta tese, a aplicação  $f$  (campo de vetores) não depende explicitamente da variável  $t$ , razão pela qual se diz que o sistema é autónomo.

O campo de vetores  $f$ , na definição de equação diferencial, assume o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^n$  como o espaço das variáveis, também designado por **espaço de fase**, munido da norma usual de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\|\cdot\|$ .

**Definição 2.2** A solução da equação diferencial (2.1) é uma aplicação  $\phi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $S \subset \mathbb{R}$  é intervalo e tal que

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = f(\phi(t)).$$

Uma solução  $\phi(t)$  pode ser interpretada como uma curva no espaço  $\mathbb{R}^n$  parametrizada por  $t$ , cujo vetor velocidade, em cada ponto, é dado por  $f(\phi(t))$ . A trajetória de uma solução é a projeção, em  $\mathbb{R}^n$ , do seu gráfico. Ao conjunto das trajetórias da equação diferencial chama-se **fluxo**. A representação do fluxo em  $\mathbb{R}^n$  denomina-se por **diagrama de fase** do sistema de equações (2.1). Admitindo que  $f$  é Lipschitz, em Sotomayor [29] prova-se que o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \phi(t_0) = x_0 \end{cases}, t_0 \in \mathbb{R} \text{ e } x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

tem uma só solução local definida em  $]t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon[$ , para algum  $\epsilon > 0$  e se  $f$  estiver definida numa variedade compacta e sem bordo, então a solução pode ser estendida a  $\mathbb{R}$ .

Daqui por diante, vai-se supor que as condições do Teorema da Existência de Unicidade de Solução são satisfeitas (basta que a função  $f$  seja  $C^1$ ) e que as soluções podem ser definidas para todo  $t \in \mathbb{R}$ . É usual designar por  $\phi(t, x)$  a única curva solução (definida em  $\mathbb{R}$ ) de (2.1) que, num dado instante  $t = t_0$ , está na posição  $x \in \mathbb{R}^n$ ; no decorrer deste trabalho, convencionou-se  $t_0 = 0$ .

### 2.1.1 Conjuntos Invariantes pelo Fluxo

**Definição 2.3** (Perko [25], capítulo 2.5) Relativamente à equação (2.1), seja  $U$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ , diz-se que  $U$  é **invariante pelo fluxo** do sistema (2.1) se

$$\forall x \in U, \forall t \in \mathbb{R}, \phi(t, x) \subseteq U.$$

É trivial concluir que  $\emptyset$  e  $\mathbb{R}^n$  são conjuntos invariantes pelo fluxo. Uma vez que estes conjuntos invariantes não têm grande interesse, é usual considerar-se apenas os conjuntos próprios de  $\mathbb{R}^n$ . Da definição, resulta imediatamente que toda a trajetória é invariante pelo fluxo, sendo que o exemplo mais simples é o de ponto de equilíbrio (ver Definição 2.4).

### 2.1.2 Pontos de Equilíbrio e sua Estabilidade

Numa interpretação cinemática, um ponto de equilíbrio é um ponto do espaço de fase que não se move pelo fluxo ao longo do tempo  $t$ , isto é, que possui velocidade nula.

**Definição 2.4** Relativamente à equação (2.1), o ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  diz-se um **ponto de equilíbrio** se  $x_0$  é uma solução da equação  $f(x) = 0_{\mathbb{R}^n}$ .

Dada uma condição inicial perto de um ponto de equilíbrio, de acordo com a sua dinâmica, a trajetória da solução definida por essa condição inicial pode-se aproximar, afastar ou manter à mesma distância desse ponto de equilíbrio. Este comportamento está relacionado com o conceito de estabilidade de um ponto de equilíbrio. Segundo as definições 1, 2 e 3 de Hirsch & Smale ([18], capítulo 9), tem-se:

**Definição 2.5** Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio da equação (2.1).

1. O ponto  $x_0$  diz-se um ponto de equilíbrio **Lyapunov estável** se para qualquer vizinhança  $U$  de  $x_0$ , existe uma vizinhança  $W$  de  $x_0$  contida em  $U$ , tal que se  $\phi(t, x)$  é uma solução da equação diferencial e  $\phi(t_0, x) \in W$  (para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ), então  $\phi(t, x)$  está contida em  $U$  para todo  $t > t_0$ .

2. O ponto  $x_0$  diz-se um ponto de equilíbrio **assintoticamente estável** se é Lyapunov estável e se existe uma vizinhança  $W$  de  $x_0$ , tal que se  $\phi(t, x)$  é uma solução da equação diferencial com  $\phi(t_0, x) \in W$ , para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ , se tem  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t, x) = x_0$ , ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R} : t > M \Rightarrow \|\phi(t, x) - x_0\| < \varepsilon.$$

3. O ponto  $x_0$  diz-se um ponto de equilíbrio **instável** se não é Lyapunov estável, isto é, se existe uma vizinhança  $U$  de  $x_0$ , tal que para toda a vizinhança  $W$  de  $x_0$  contida em  $U$ , existe pelo menos uma solução  $\phi(t, x)$  da equação diferencial com  $\phi(t_0, x) \in W$  (para algum  $t_0 \in \mathbb{R}$ ) e

$$\exists t_1 \in \mathbb{R} : (t_1 > t_0 \text{ e } \phi(t_1, x) \notin U).$$

Um ponto de equilíbrio assintoticamente estável é um **atrator local**, no sentido que, para qualquer  $x$  numa vizinhança desse ponto de equilíbrio, a curva  $\phi(t, x)$  aproxima-se, tanto quanto se queira, para esse ponto de equilíbrio. Um ponto de equilíbrio Lyapunov **estável** pode não ser um atrator (ver exemplo na Figura 2.1 (i)).

Os três tipos de estabilidade definidos atrás estão ilustrados na Figura 2.1.

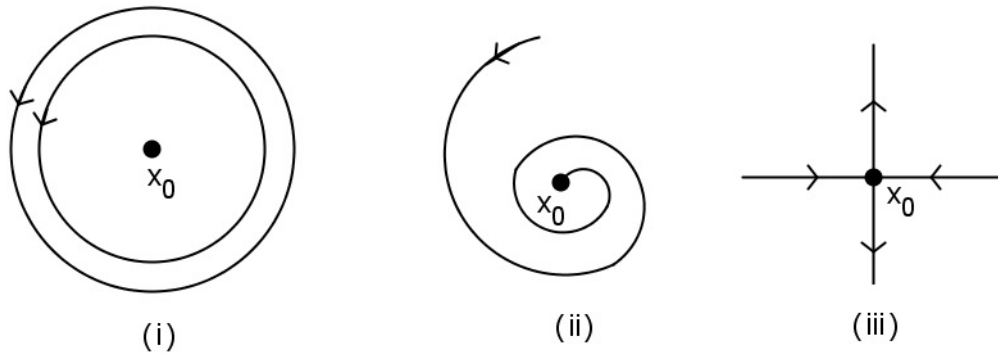


Figura 2.1: Ilustração de três pontos de equilíbrio: (i) estável, (ii) assintoticamente estável e (iii) instável.

**Definição 2.6** (Araújo & Pacífico [3], capítulo 2, adaptado) O ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  diz-se **não errante** para  $f$  se para alguma vizinhança aberta  $U$  de  $x_0$ , existe  $t_0 \in \mathbb{R}_0^+$  tal que

$$\forall t \geq t_0, \phi(t, U) \cap U \neq \emptyset.$$

**Definição 2.7** (Hirsch & Smale [18], capítulo 9) Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio da equação (2.1). Diz-se que  $x_0$  é um ponto de equilíbrio **hiperbólico** se  $df(x)|_{x_0}$  não tiver valores próprios com parte real nula.

Em Arnold [5], prova-se que se  $x_0$  é um ponto de equilíbrio Lyapunov estável, então a parte real de todos os valores próprios de  $df(x)|_{x_0}$  é não positiva.

Um dos corolários imediatos deste facto é que um ponto de equilíbrio hiperbólico ou é assintoticamente estável ou é instável.

**Definição 2.8** (Hirsch & Smale [18], adaptado) O ponto de equilíbrio  $x_0$  de (2.1) diz-se um **foco** se  $df(x)|_{x_0}$  tiver pelo menos um par de valores próprios complexos conjugados com parte real não nula. Se a parte real desses valores próprios for positiva,  $x_0$  diz-se um **foco instável**, se for negativa, chama-se de **foco estável** (ver Figura 2.2).

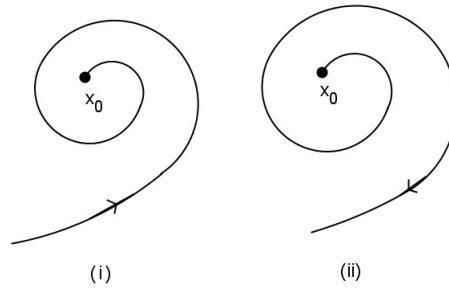


Figura 2.2: Ilustração de foco: (i) estável, (ii) instável (a direção da seta descreve a evolução de posição em função do tempo).

**Definição 2.9** (Hirsch & Smale [18], capítulo 9) Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.1).

1. Diz-se que  $x_0$  é um **poço** se todos os valores próprios de  $df(x)|_{x_0}$  têm parte real negativa.
2. Diz-se que  $x_0$  é uma **fonte** se todos os valores próprios de  $df(x)|_{x_0}$  têm parte real positiva.
3. Diz-se que  $x_0$  é um **ponto de sela** se existe pelo menos um valor próprio de  $df(x)|_{x_0}$  com parte real positiva e pelo menos um valor próprio com parte real negativa.

A Figura 2.3 exemplifica as definições referidas anteriormente.

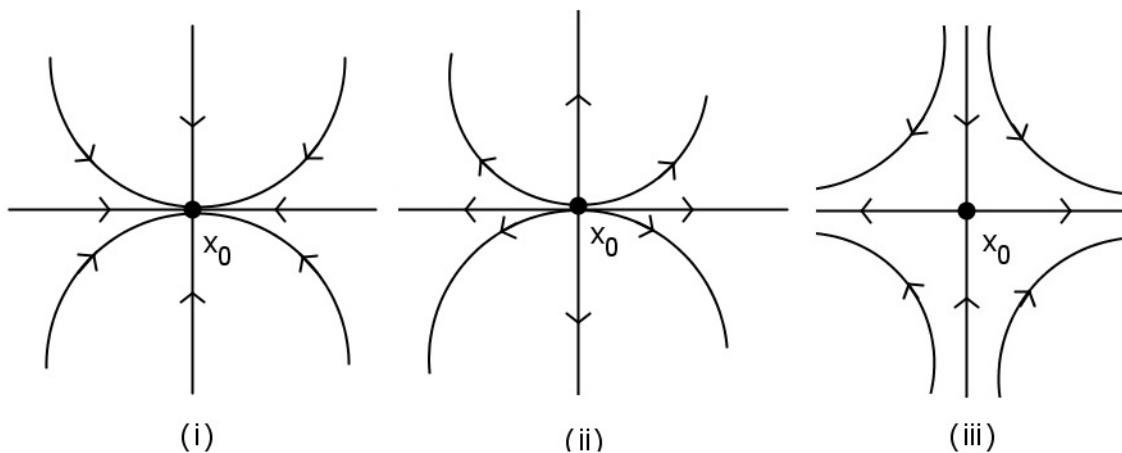


Figura 2.3: Exemplo de três pontos de equilíbrio: (i) poço, (ii) fonte e (iii) sela.

Um poço e um foco estável são exemplos de pontos de equilíbrio **atratores locais**. Uma fonte e um foco instável são exemplos de pontos de equilíbrio **repulsores locais**, no sentido em que qualquer trajetória arbitrariamente perto do ponto de equilíbrio se afasta dele.

Em seguida, apresenta-se a definição de sistemas topologicamente equivalentes em torno de um ponto de equilíbrio  $x_0$  de (2.1) que se supõe ser a origem,  $0_{\mathbb{R}^n}$ . A definição pode ser generalizada para qualquer ponto de equilíbrio, efetuando uma translação.

**Definição 2.10** (Perko [25], capítulo 2.8, adaptado) Sejam  $f$  e  $g$  dois campos de vetores em  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^\infty$  tais que  $0_{\mathbb{R}^n}$  é um ponto de equilíbrio do sistema  $\dot{x} = f(x)$ . Os sistemas  $\dot{x} = f(x)$  e  $\dot{x} = g(x)$  são **topologicamente equivalentes** numa vizinhança de  $0_{\mathbb{R}^n}$  se existem abertos  $U$  e  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ , com  $0_{\mathbb{R}^n} \in U$  e  $0_{\mathbb{R}^n} \in V$ , e um homeomorfismo  $H : U \rightarrow V$  que envia as curvas solução de  $\dot{x} = f(x)$  nas curvas solução de  $\dot{x} = g(x)$ , preservando o seu sentido (ver Figura 2.4).

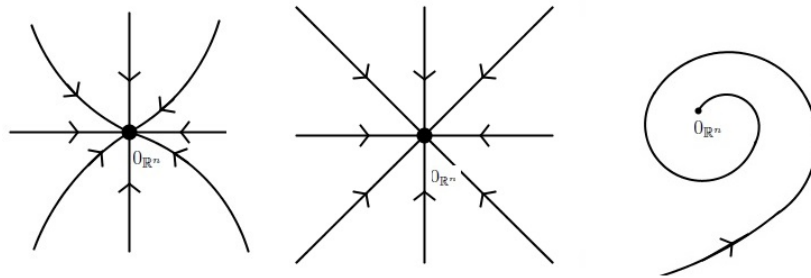


Figura 2.4: Exemplo de três diagramas de fase de sistemas topologicamente equivalentes.

## 2.2 Simetrias de Equações Diferenciais

Neste trabalho, vão-se estudar sistemas de equações diferenciais com simetria, isto é, sistemas que comutam com a ação de um determinado grupo de simetrias. Uma consequência importante da simetria é a existência de subespaços vetoriais de  $\mathbb{R}^n$  que são invariantes pelo fluxo. Esta particularidade favorece o aparecimento de ciclos e redes heteroclínicos, conforme será explicado ao longo desta tese (ver secção 3.3).

As definições e resultados apresentados ao longo da secção 2.2 seguem de perto Golubitsky et al. [17] e Rodrigues [26].

**Definição 2.11** ([17], capítulo XI) Seja  $\gamma$  uma matriz  $n \times n$  invertível, com entradas reais. A aplicação linear  $\gamma$  diz-se uma **simetria** de (2.1) se

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(\gamma x) = \gamma f(x).$$

Da definição anterior resulta que se  $\gamma$  é uma simetria de (2.1) e se  $\phi$  é uma solução do mesmo sistema, então  $\gamma\phi$  é uma solução do sistema. Com efeito, tem-se

$$\frac{d(\gamma\phi(t, x))}{dt} = \gamma \left( \frac{d(\phi(t, x))}{dt} \right) = \gamma f(\phi(t, x)) = f(\gamma\phi(t, x)). \quad (2.2)$$

A primeira igualdade de (2.2) resulta da derivada da função composta e do facto da derivada de uma aplicação linear ser a própria aplicação. Em particular, se  $\gamma$  é uma simetria de (2.1) e se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio de (2.1), então  $\gamma x_0$  também é um ponto de equilíbrio de (2.1).

### 2.2.1 Teoria de Grupos

Denote-se por  $GL(\mathbb{R}^n)$  o conjunto dos endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$  que são invertíveis (isto é, cuja matriz tem determinante não nulo).

#### Grupos de Simetrias

O conjunto das simetrias do sistema de equações diferenciais (2.1) é o conjunto

$$\Gamma = \{\gamma \in GL(\mathbb{R}^n) : f(\gamma x) = \gamma f(x), \forall x \in \mathbb{R}^n\}. \quad (2.3)$$

Este conjunto munido da multiplicação usual de matriz, tem a estrutura de grupo e será denotado por **grupo de simetrias** de (2.1).

**Definição 2.12** ([17], capítulo XI) Se  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  é um ponto de equilíbrio do sistema (2.1) e se  $\gamma$  é uma simetria do sistema tal que  $\gamma x_0 = x_0$ , diz-se que  $\gamma$  é uma **simetria de  $x_0$** .

**Definição 2.13** ([17], capítulo XIII) Seja  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $\Gamma \leq GL(\mathbb{R}^n)$ . **A órbita de grupo de  $x_0$**  por  $\Gamma$  é o conjunto

$$\Gamma x_0 = \{\gamma x_0, \gamma \in \Gamma\}.$$

Se  $x_0$  é um ponto de equilíbrio de (2.1) e se  $y$  é um elemento da órbita de grupo de  $x_0$ , então  $y$  é um ponto de equilíbrio do sistema. Assim, se  $\gamma$  é uma simetria de  $x_0$ , tem-se que  $\gamma x_0$  ou é o mesmo ponto de equilíbrio ou é um ponto de equilíbrio distinto. Neste sentido, assumindo a relação de equivalência

$$x \sim y \Leftrightarrow x \in \Gamma y,$$

pontos de equilíbrio que pertencem à mesma **órbita de grupo** são iguais (pertencem a mesma classe de equivalência).

#### Grupo de Lie Compacto

A definição de grupo de Lie pode ser bastante mais complexa do que é apresentada aqui. Porém, para o estudo em causa não é necessário aprofundar mais acerca destes conceitos.

**Definição 2.14** ([17], capítulo XII) Um **grupo de Lie linear** é um subgrupo fechado de  $GL(\mathbb{R}^n)$ .

Diz-se que dois grupos são **isomorfos** se existir uma bijeção entre eles que preserva o produto. Em ([17], pp.30), pode-se ver que qualquer grupo de Lie compacto é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear (Teorema da conjugação topológica da medida de Haar), razão pela qual se pode reduzir o estudo que se segue aos grupos de Lie lineares e compactos.

### Exemplo de Grupo de Lie $\mathbb{Z}_2$

Seja  $n \in \mathbb{N}$ . O conjunto  $\{\mathbb{I}_n, -\mathbb{I}_n\}$ , munido da multiplicação usual de matrizes, é um subgrupo fechado de  $GL(\mathbb{R}^n)$ . Logo,  $\{\mathbb{I}_n, -\mathbb{I}_n\}$  é um grupo de Lie e será chamado de  $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ , uma vez que são isomorfos como grupos abstratos (em geral, denomina-se o grupo de Lie com o nome de grupo abstrato que lhe está associado).

### Ações do Grupo de Lie

Nesta secção será apresentado o conceito de ação de um grupo de Lie num espaço vetorial de dimensão finita.

**Definição 2.15** ([17], capítulo XII) Seja  $V$  um espaço vetorial (de dimensão finita) sobre o corpo dos reais e seja  $\Gamma$  um grupo de Lie, diz-se que  $\Gamma$  é uma **ação linear** em  $V$  se existe uma aplicação contínua (a ação)

$$\Gamma \times V \rightarrow V$$

$$(\gamma, v) \mapsto \gamma.v$$

tal que:

$$(i) \forall \gamma \in \Gamma,$$

$$\rho_\gamma : V \rightarrow V$$

$$v \mapsto \gamma.v$$

é linear;

$$(ii) \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \forall v \in V (\gamma_1.\gamma_2).v = \gamma_1.(\gamma_2.v) \text{ [associatividade].}$$

A ação informa acerca do modo como um elemento do grupo transforma um elemento do espaço.

### 2.2.2 Subespaços de Pontos Fixos

Uma característica importante dos sistemas com simetria é que a simetria força a existência de subespaços lineares invariantes pelo fluxo, os subespaços associados de pontos fixos. O facto dos subespaços de pontos fixos serem invariantes pelo fluxo do campo de vetores  $f$  não implica que estes sejam invariantes pela ação do grupo de simetria do sistema. No que se segue,  $\Gamma$  é o grupo de simetrias de (2.1) [ver (2.3)].

**Definição 2.16** ([17], capítulo XIII) Sejam  $\Gamma$  um grupo de Lie compacto e  $\Sigma$  um subgrupo de  $\Gamma$ . O **subespaço de pontos fixos** de  $\Sigma$  é o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \forall \sigma \in \Sigma, \sigma x = x\},$$

o qual se denota daqui em diante por  $Fix(\Sigma)$ .

### 2.2.3 Funções Equivariantes

Nesta secção,  $V$  representa um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Definição 2.17** ([17], capítulo XII) Sejam  $f : V \rightarrow V$  um campo de vetores e  $\Gamma$  um grupo de Lie com ação linear em  $V$ . Diz-se que  $f$  é  $\Gamma$ -equivariante se cada  $\gamma \in \Gamma$  comuta com  $f$ , isto é,

$$\forall \gamma \in \Gamma, \forall x \in V, f(\gamma x) = \gamma f(x).$$

Dizer que o grupo de simetrias de (2.1) é  $\Gamma$ -equivariante implica que o campo de vetores  $f$  é  $\Gamma$ -equivariante. Se o campo de vetores  $f$  é  $\Gamma$ -equivariante, então  $\Gamma$  é um subgrupo do grupo de simetrias de (2.1).

## 2.3 Fluxo Morse-Smale e relação com o Fluxo Gradiente

Nesta secção, será apresentado o conceito de fluxo Morse-Smale e a sua relação com o fluxo gradiente.

**Definição 2.18** (Banyaga & Hurtubise [11], capítulo 3) Seja  $M$  uma variedade diferenciável compacta, sem bordo, com métrica Riemanniana e seja  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave ( $C^r$ ,  $r \geq 1$ ). Então,

$$H(x) = -\text{grad}f(x) \tag{2.4}$$

define um **campo gradiente em**  $M$ . Ao conjunto de soluções de  $\dot{x} = H(x)$  chama-se **fluxo gradiente**.

O sinal menos de (2.4) faz com que o fluxo “desça”,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}f(\phi(t, x)) &= \frac{\partial}{\partial x}f(\phi(t, x)) \times \frac{\partial}{\partial t}\phi(t, x) \\ &= -\text{grad}f|_{\phi(t, x)} \times \text{grad}f|_{\phi(t, x)} \\ &= -\|\text{grad}f(x)\|^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Relativamente à equação (2.1), um **elemento crítico** pode ser considerado um ponto de equilíbrio ou uma solução periódica não trivial.

**Definição 2.19** (Araújo & Pacífico [3], capítulo 2) Diz-se que o fluxo associado a (2.1) é **Morse-Smale** se:

1. existir um número finito de elementos críticos, todos eles hiperbólicos;
2. as variedades invariantes (estável e instável) <sup>1</sup> se intersectam transversalmente;

---

<sup>1</sup>Mais detalhes na secção 3.2.

3. os únicos pontos não errantes (ver definição na secção 2.1.2) do fluxo se restringem aos elementos críticos.

A Figura 2.5 apresenta um exemplo de um sistema Morse-Smale, típico em aplicações de primeiro retorno associadas a secções globais de um toro atrator.

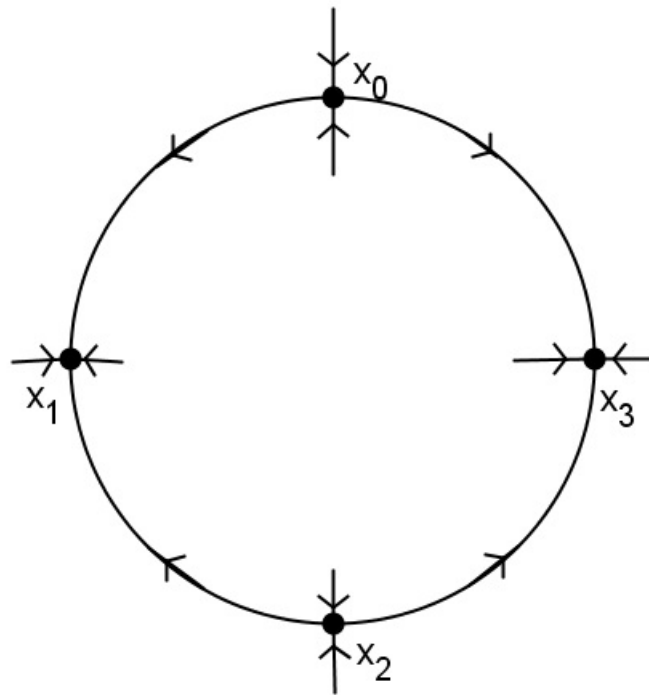


Figura 2.5: Exemplo de um sistema Morse-Smale, onde  $x_0, x_1, x_2$  e  $x_3$  representam órbitas periódicas.

O Teorema de Kupka-Smale (Banyaga & Hurtubise [11], Teorema 6.6) fornece uma relação entre os campos gradiente e os que são Morse-Smale, quando restritos a uma variedade compacta. Mais concretamente, campos de vetores Morse-Smale são **genéricos** (ver definição em [11], definição 6.5) no espaço dos campos gradiente.

## 2.4 Medida de Lebesgue

A definição de medida de Lebesgue é mais complexa do que a que aqui é apresentada. Porém, para o estudo em causa não é necessário aprofundar mais acerca deste conceito.

A medida de Lebesgue está definida na  $\sigma$ -álgebra de Borel  $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$  (ver Taylor [30], capítulo 1.5), o **subconjunto das partes de  $X$** ,  $\mathcal{P}_X$ , que contém todos os conjuntos abertos e conjuntos fechados de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definição 2.20** (Walters [31], capítulo 0.2) A **medida de Lebesgue** em  $\mathbb{R}^n$  é uma função  $\mu : \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  que goza as seguintes propriedades:

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
2.  $\forall A_n \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ,

onde  $\dot{\bigcup}$  representa a união disjunta.

Aos elementos do domínio de  $\mu$  chamamos **mensuráveis** e  $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}, \mu)$  diz-se um **espaço de medida** (ou **espaço mensurável**).

**Definição 2.21** (Walters [31], capítulo 0.4) Seja  $(X, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$  um espaço mensurável e  $\mu, \nu$  duas medidas de probabilidades em  $(X, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n})$ . Diz-se que  $\nu$  é **absolutamente contínua com respeito a  $\mu$**  e denota-se por  $\nu \ll \mu$ , se e só se, para qualquer  $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}^n}$  tal que

$$\mu(B) = 0 \implies \nu(B) = 0.$$

As medidas  $\mu$  e  $\nu$  são equivalentes se  $\nu \ll \mu$  e  $\mu \ll \nu$ .

## 2.5 Grafos

Estruturas que podem ser representadas através de grafos podem ser encontradas em muitas áreas de conhecimento e problemas de interesse prático podem ser formulados através de grafos (Cioabã & Murty [13]). Nesta secção serão apresentados os conceitos de grafo e dígrafo.

**Definição 2.22** (Cioabã & Murty [13], capítulo 1.2) Um **grafo**  $G$  é um par ordenado  $(V, E)$  que consiste num conjunto não vazio de **vértices** (ou **nós**)  $V = V(G)$  e **arestas**  $E = E(G)$  que associa a cada aresta dois vértices (não necessariamente distintos) chamados de **extremidades** (ver Figura 2.6 (i)).

**Definição 2.23** (Cioabã & Murty [13], capítulo 1.2) Seja  $G(V, E)$  um grafo.

1. Se uma aresta de  $G(V, E)$  tem uma só extremidade, diz-se um **lacete**.
2. Arestas distintas de  $G(V, E)$  com as mesmas extremidades dizem-se **arestas múltiplas**.
3. Dois vértices de  $G(V, E)$  são considerados **adjacentes** se existir apenas uma aresta entre os vértices.
4. Um grafo  $G(V, E)$  é **finito** se os conjuntos de vértices e arestas são finitos.
5. Um grafo  $G(V, E)$  diz-se **simples** se não tiver lacetes nem arestas múltiplas.

**Definição 2.24** (Cioabã & Murty [13], capítulo 1.3) Seja  $G(V, E)$  um grafo.

1. Um **passeio** em  $G(V, E)$  é uma sequência do tipo  $v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k$  de vértices  $v_i \in V$  e arestas  $e_i \in E$ , tal que para  $1 \leq i \leq k$ , a aresta  $e_i$  tem extremidades  $v_{i-1}$  e  $v_i$  (por exemplo:  $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_4, v_4$  é um passeio da Figura 2.6).

2. Um **atalho** em  $G(V, E)$  é um passeio em que não se repetem arestas.
3. Um **circuito** é um atalho fechado.
4. Um **caminho** em  $G(V, E)$  é um passeio em que não se repetem vértices.
5. Um **passeio fechado** em  $G(V, E)$  termina no vértice em que começou.
6. Um **ciclo** em  $G(V, E)$  é um passeio fechado em que o único vértice repetido é o inicial que volta a aparecer no fim.
7. Um grafo  $G(V, E)$  diz-se **conexo** se, para qualquer  $v_i, v_j \in V$ , existe um caminho de  $v_i$  a  $v_j$ .

**Definição 2.25** (Cioabã & Murty [13], capítulo 1.6) Um **grafo orientado** ou **dígrafo** é um grafo  $G(V, E)$  onde em cada aresta é associado um par ordenado de vértices (orientado) (ver Figura 2.6 (ii)).

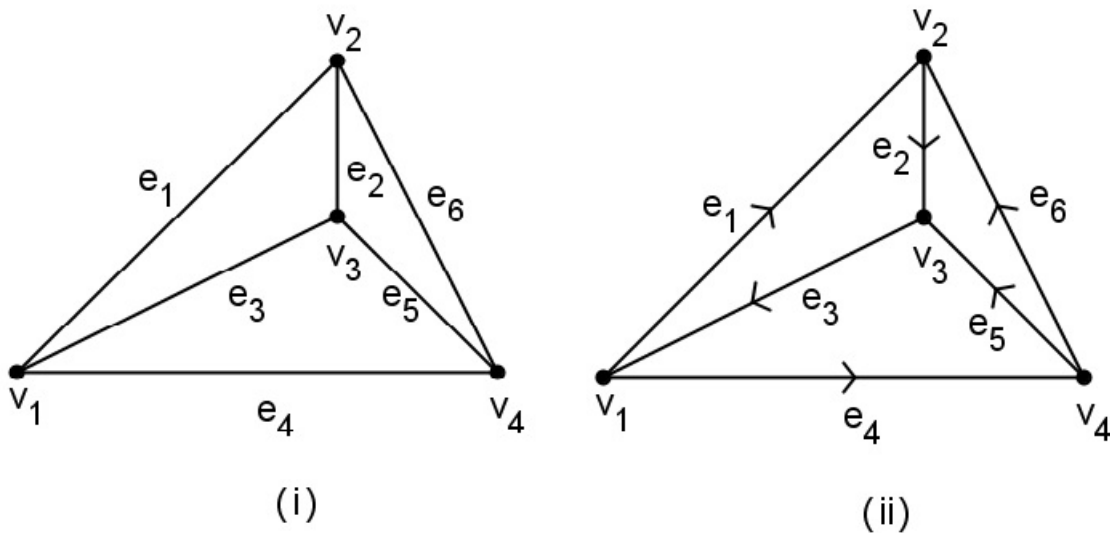


Figura 2.6: (i) Ilustração de um grafo simples. (ii) Ilustração de um dígrafo ou grafo orientado.



## Capítulo 3

# Ciclos e Redes Heteroclínicas

Neste capítulo, caracterizam-se formalmente ciclos e redes heteroclínicas, bem como a sua estabilidade estrutural e assintótica. Ainda serão estudadas a relação entre redes heteroclínicas e dígrafos. A letra  $d$  representa a métrica usual de  $\mathbb{R}^n$ . Toda a teoria a ser exposta diz respeito ao sistema (2.1), restrita a uma variedade compacta e sem bordo de  $\mathbb{R}^n$ .

As definições e resultados apresentados ao longo das secções 3.1 à 3.3 seguem de perto Rodrigues [26].

### 3.1 Conjuntos $\omega$ e $\alpha$ limite

Segundo (Hirsch & Smale [18], capítulo 11), tem-se:

**Definição 3.1** Relativamente a sistema (2.1), sejam  $W$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $y, z \in W$ .

1. Diz-se que o ponto  $y$  é um  **$\omega$ -limite** de  $z$  se existir uma sucessão  $t_n \rightarrow +\infty$  tal que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \phi(t_n, z) = y.$$

O conjunto  $\omega$ -limite de  $z$  é o conjunto de todos os pontos  $\omega$ -limite de  $z$ , o qual se denota por  $\omega(\{z\})$ .

2. Diz-se que o ponto  $y$  é um  **$\alpha$ -limite** de  $z$  se existir uma sucessão  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que

$$\lim_{n \in \mathbb{N}} \phi(t_n, z) = y.$$

O conjunto  $\alpha$ -limite de  $z$  é o conjunto de todos os pontos  $\alpha$ -limite de  $z$ , o qual se denota por  $\alpha(\{z\})$ .

Generalizando a Definição 3.1, o conjunto  $\omega$ -limite de um conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  é o conjunto dos  $\omega$ -limite de todos os elementos de  $S$  e é denotado por  $\omega(S)$ . Analogamente, o conjunto  $\alpha$ -limite de  $S$  é o conjunto dos  $\alpha$ -limite de todos os elementos de  $S$  e é denotado por  $\alpha(S)$ . Quando  $S$  é uma trajetória fechada (definida para todo  $t \in \mathbb{R}$ ), Hirsch & Smale [18] provam

que  $\omega(S)$  e  $\alpha(S)$  são compactos e invariantes pelo fluxo do sistema. Desta observação, decorre que se uma curva solução  $\phi(t, x)$  do sistema (2.1) tem um único ponto  $\omega$ -limite (ou  $\alpha$ -limite), então esse ponto é um ponto de equilíbrio.

Então, claramente se vê que o conjunto  $\alpha$ -limite e  $\omega$ -limite de um ponto de equilíbrio de um sistema de equações diferenciais se reduz ao próprio ponto e que os conjuntos  $\omega$ -limite e  $\alpha$ -limite de pontos que estão na mesma trajetória são iguais.

### 3.2 Conjuntos Estável e Instável de um Compacto Invariante

**Definição 3.2** (Field [15], definição 6.3) Seja  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto e invariante pelo fluxo do sistema (2.1).

1. O **conjunto estável** de  $S$  é dado por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), S) = 0 \right\}$$

e denota-se por  $W^s(S)$ .

2. O **conjunto instável** de  $S$  é dado por

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\phi(t, x), S) = 0 \right\}$$

e denota-se por  $W^u(S)$ .

Se, em todos os pontos  $x$  do compacto  $S$ , a linearização do campo de vetores  $f$  não tiver valores próprios com parte real zero, então está garantida a existência de  $W^s(S)$  e  $W^u(S)$ , como variedades topológicas de  $\mathbb{R}^n$ . Alguns autores chamam à  $W^s(S)$ , a **bacia de atração de  $S$** .

Segue da definição que  $W^s(S)$  e  $W^u(S)$  são invariantes pelo fluxo e que  $S \subset W^s(S)$ ,  $S \subset W^u(S)$ . Relacionando os conceitos de  $\omega$ -limite com **variedade estável de um compacto**, tem-se que  $\omega(\{x\}) \subset S$ , se e só se,  $x \in W^s(S)$ , sendo válida uma relação análoga para  $\alpha(\{x\})$  e  $W^u(S)$  (Ashwin & Field [8]).

As Variedades instável e estável definidos atrás estão ilustrados na Figura 3.1.

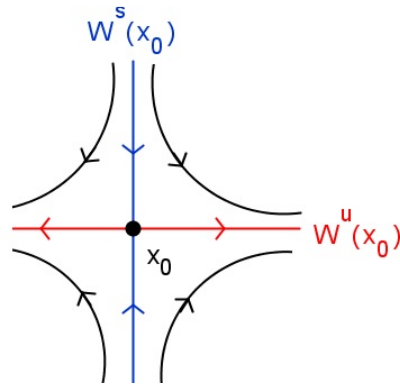


Figura 3.1: Ilustração de variedades instável  $W^u(x_0)$  e estável  $W^s(x_0)$  de um ponto de sela  $x_0$  em  $\mathbb{R}^2$ .

No caso particular de  $S$  ser um ponto de equilíbrio do sistema (2.1), é sabido que as dimensões das variedades  $W^s(S)$  e  $W^u(S)$  são as mesmas que as dos subespaços próprios  $\mathbb{E}^s$  e  $\mathbb{E}^u$  da parte linear de  $f$  em  $S$ . Se  $S = \{x_0\}$ , onde  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , escreve-se  $W^u(x_0)$  e  $W^s(x_0)$  em vez de  $W^u(\{x_0\})$  e  $W^s(\{x_0\})$  (ver Figura 3.1).

### 3.3 Ciclo e Rede Heteroclínicos

A ideia intuitiva de ciclo heteroclínico é a de uma sequência finita e ordenada de compactos invariantes e de uma ligação de cada compacto para o compacto seguinte, incluindo do último para o primeiro (ver Figura 3.2 (i)). As ligações consistem numa ou mais trajetórias (ver Figura 3.2 (ii)), podendo ser uma infinidade.

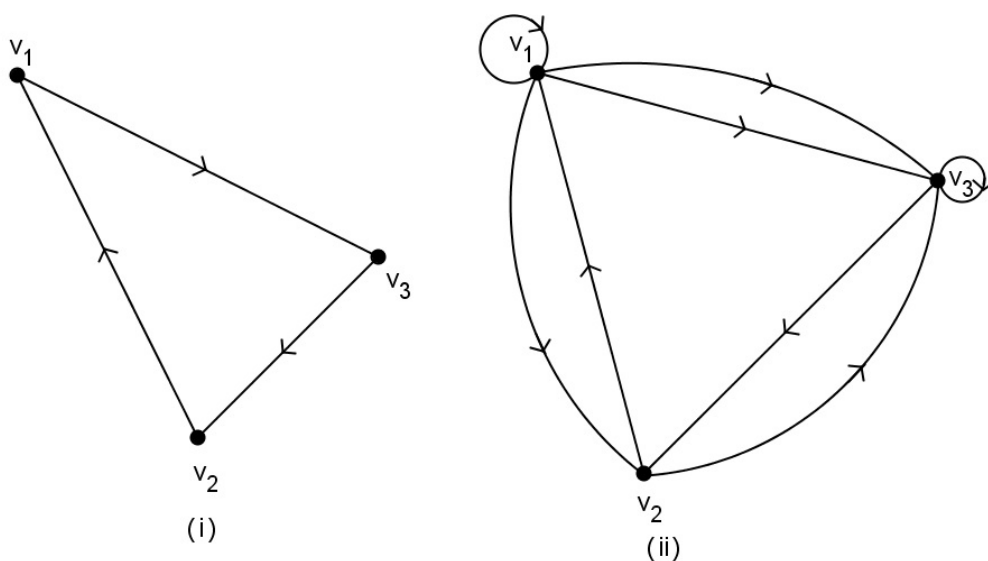


Figura 3.2: (i) Exemplo do dígrafo associado a um ciclo heteroclínico. (ii) Exemplo do dígrafo associado a um ciclo heteroclínico com múltiplas ligações.

Se  $A \subseteq \mathbb{R}^n$ , representa-se por  $\bar{A}$  a aderência ou fecho topológico do conjunto  $A$ .

**Definição 3.3** (Field [15], definição 6.5) Relativamente ao sistema de equações diferenciais (2.1), seja  $S$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$ , diz-se que  $S$  é uma **sela invariante** se:

1. o subconjunto  $S$  é invariante pelo fluxo de (2.1);
2. o subconjunto  $S \subseteq \overline{W^s(S) \setminus S}$  e  $S \subseteq \overline{W^u(S) \setminus S}$ .

**Definição 3.4** (Field [15], definição 6.7) Relativamente ao sistema (2.1), seja  $S$  um conjunto de selas invariantes (ordenadas) mutuamente disjuntas, definido por

$$S = \{S_j : j \in \{1, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Se

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, W^u(S_j) \cap W^s(S_{(j+1) \bmod k}) \neq \emptyset,$$

diz-se que existe um **ciclo heteroclínico** associado a  $S$ . Ao conjunto

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^k (S_j \cup [W^u(S_j) \cap W^s(S_{(j+1) \bmod k})])$$

chama-se **ciclo heteroclínico (maximal)** associado a  $S$ .

Na sequência da definição anterior, segue a definição de ligação heteroclínica.

**Definição 3.5** (Aguiar et al. [1]) Sejam  $S_j$  e  $S_{j+1}$ ,  $j \in \{1, \dots, k\}$ , duas selas invariantes. Uma **ligação heteroclínica** (de dimensão  $p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ), da sela  $S_j$  para a sela  $S_{j+1}$ , é uma **variedade conexa** e invariante pelo fluxo (de dimensão  $p$ ) contida em

$$W^u(S_j) \cap W^s(S_{(j+1) \bmod k}).$$

Na definição anterior, se  $p = 1$ , então a ligação heteroclínica é uma trajetória, a qual será denotada, unicamente por  $S_j \rightarrow S_{j+1}$ . Se  $p > 1$ , a ligação heteroclínica é uma união de trajetórias (Ashwin & Chossat [7]). Se  $k = 1$ , o conjunto  $\Sigma$ , conforme definido na secção 3.4, é designado por **ciclo homoclínico**.

Da definição de ciclo heteroclínico resulta trivialmente que um ciclo heteroclínico é invariante pelo fluxo, dado ser a união de conjuntos invariantes pelo fluxo.

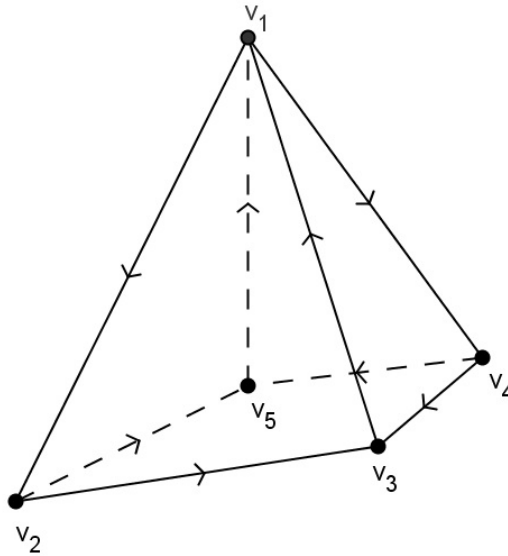


Figura 3.3: Exemplo do dígrafo associado a uma rede heteroclínica.

Outro conceito essencial neste trabalho é o de rede heteroclínica. Intuitivamente, uma rede heteroclínica é uma coleção conexa e finita de ciclos heteroclínicos (ver Figura 3.3). Em Field [15], as redes heteroclínicas são também designadas por **complexos heteroclínicos**.

**Definição 3.6** (Field [15], definição 6.22) Seja  $\mathcal{A}$  um conjunto finito (não necessariamente ordenado) de selas invariantes do sistema (2.1):

$$\mathcal{A} = \{A_r : r \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Diz-se que um subconjunto  $\Sigma$  de  $\mathbb{R}^n$  invariante pelo fluxo é uma **rede heteroclínica** se existe um conjunto finito de subconjuntos  $\mathcal{A}_j$  de  $\mathcal{A}$  não vazios (e ordenados), tais que:

1. Cada  $\mathcal{A}_j$  define um ciclo heteroclínico  $\Sigma_j$ ;
2.  $\Sigma = \bigcup_{j=1}^p \Sigma_j$ ;
3. Se, para alguns  $m$  e  $n$  ( $1 \leq m, n \leq k$ ), se tem:  $W^u(A_m) \cap W^s(A_n) \neq \emptyset$ , então existe  $j \in \{1, \dots, p\}$ , tal que  $W^u(A_m) \cap W^s(A_n) \subset \Sigma_j$ ;
4.  $\mathcal{A} = \bigcup_{j=1}^p \mathcal{A}_j$ .

Note-se que se  $\Sigma$  é uma rede heteroclínica associada ao conjunto de selas invariantes

$$\mathcal{A} = \{A_r : r \in \{1, \dots, k\}\},$$

então,

$$\Sigma = \bigcup_{r,s \in \{1, \dots, k\}} [W^u(A_r) \cap W^s(A_s)].$$

Nesta tese, as selas a considerar serão disjuntas entre si. Se a rede heteroclínica associada a  $\mathcal{A} = \{A_r : r \in \{1, \dots, k\}\}$  for conexa, então dadas duas selas invariantes  $A_r$  e  $A_s$ , existe uma sequência finita de trajetórias do fluxo do sistema (2.1) que “**liga**” a sela  $A_r$  à sela  $A_s$ .

### 3.3.1 Estabilidade Estrutural

Nesta secção, apresenta-se o conceito de estabilidade estrutural (robustez) de um campo de vetores (Perko [25]). Um campo de vetores  $f$  diz-se estruturalmente estável se, para qualquer campo de vetores  $g$  “suficientemente perto” de  $f$ , se tem  $f$  e  $g$  topologicamente equivalentes. Impõe-se então a definição do conceito “suficientemente perto”, que exige a definição de uma métrica no conjunto das aplicações diferenciáveis, definidas em  $\mathbb{V} \subseteq \mathbb{R}^n$ . No lema que se segue  $|\cdot|$  representa a norma do máximo definida nos endomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lema 3.7** (Perko [25], capítulo 4.1) Sejam  $\mathbb{V}$  um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^n$  e  $C^1(\mathbb{V})$  o conjunto dos campos de vetores definidos de  $\mathbb{V}$  em  $\mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$ . A aplicação

$$\begin{aligned} \tau : C^1(\mathbb{V}) \times C^1(\mathbb{V}) &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ (f, g) &\mapsto \sup_{x \in \mathbb{V}} \|f(x) - g(x)\| + \sup_{x \in \mathbb{V}} |df(x) - dg(x)| \end{aligned}$$

define uma métrica em  $C^1(\mathbb{V})$ , a qual se designa por topologia  $C^1$  ou métrica da convergência uniforme.

A demonstração deste lema consiste em verificar as propriedades da métrica, razão pela qual será omitida. De acordo com este lema, dado  $\varepsilon > 0$ , um campo de vetores  $f$  está  $\varepsilon - C^1$  perto do campo de vetores  $g$  se  $\tau(f, g) < \varepsilon$ ; nestas condições, o campo de vetores  $g$  diz-se uma **perturbação de norma  $\varepsilon$**  de  $f$ . Assim, tem-se:

**Definição 3.8** (Perko [25], capítulo 4.1) Seja  $f \in C^1(\mathbb{V})$ , diz-se que o campo de vetores  $f$  é **estruturalmente estável** se qualquer perturbação de  $f$  com norma suficientemente pequena é topologicamente equivalente a  $f$ .

Em geral, os campos de vetores, cujo fluxo exhibe ligações heteroclínicas de dimensão um e que resultam da interseção de variedades invariantes de dimensão um, não são estruturalmente estáveis pois, dado essa interseção ser não transversal, pequenas perturbações do campo de vetores fazem com que a interseção, e conseqüentemente a ligação, deixem de existir. O mesmo já não acontece se a ligação estiver contida num espaço invariante pelo fluxo e a perturbação mantiver a invariância desse subespaço. Isso acontece, por exemplo, em sistemas equivariantes por um dado grupo de simetrias, quando as ligações estão contidas em subespaço de pontos fixos. Para ilustrar melhor o que acaba de ser referido, explicita-se, em seguida, um exemplo apresentado em Field [15].

**Exemplo:** Considere-se a aplicação  $\sigma$  definida de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  por

$$\sigma : (x, y) \mapsto (x, -y)$$

e seja  $\Gamma$  o grupo de Lie gerado pela aplicação  $\sigma$ . A ação  $\sigma$  pode ser interpretada como uma reflexão em torno do eixo dos  $xx$ , vendo-se facilmente que a ação de  $\Gamma = \langle \sigma \rangle$  no espaço  $\mathbb{R}^2$  é isomorfa a  $\mathbb{Z}_2$ . Suponha-se, agora, que  $g$  é um campo de vetores  $\langle \sigma \rangle$ -equivariante com dois pontos de equilíbrio tipo sela, sejam eles  $a_1$  e  $a_2$ , e que  $W^u(a_1)$  e  $W^s(a_2)$  são abertos do eixo dos  $xx$  (ver Figura 3.4).

Se  $\gamma = W^u(a_1) \cap W^s(a_2)$ , tem-se que  $\gamma$  é a curva solução que “liga”  $a_1$  a  $a_2$ . Esta trajetória está contida em  $Fix(\Gamma) = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Se se perturbar o sistema, com um termo que não seja  $\langle \sigma \rangle$ -equivariante, o mais natural é ter-se  $W^u(a_1) \cap W^s(a_2) = \emptyset$  e, portanto, constata-se a quebra da trajetória  $\gamma$  (ver Figura 3.5). No entanto, se o termo da perturbação for  $\langle \sigma \rangle$ -equivariante, a ligação heteroclínica persiste. Caso o campo de vetores não possua simetrias e se as ligações não estiverem contidas em subespaços de pontos fixos, qualquer perturbação irá, em geral, quebrar essa ligação.

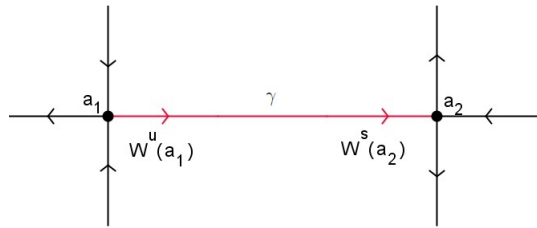


Figura 3.4: Diagrama de fase do sistema  $\mathbb{Z}_2(\langle \sigma \rangle)$ -equivariante (não perturbado) (Field [15]).

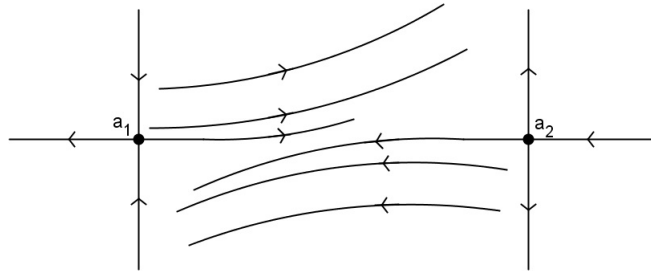


Figura 3.5: Possível diagrama de fase do sistema  $\mathbb{Z}_2(\langle \sigma \rangle)$ -não equivariante (Field [15]).

Reside aqui uma das vantagens de se ter um sistema com simetria: em geral, se uma ligação heteroclínica de um sistema  $\Gamma$ -equivariante está contida num subespaço de simetria  $S$ , então ela é estruturalmente estável (ou robusta), para perturbações  $\Delta$ -equivariantes, onde  $\Delta \leq \Gamma$  e  $Fix(\Delta) \subseteq S$ . É esta a razão pela qual as simetrias de um sistema contribuem naturalmente para a existência de ciclos heteroclínicos estruturalmente estáveis.

### 3.3.2 Estabilidade Assintótica

A noção de estabilidade de um ciclo heteroclínico pode ser vista como uma generalização da mesma noção para pontos de equilíbrios (ver secção 2.1.2). Em seguida, apresenta-se a definição de estabilidade de um ciclo heteroclínico.

**Definição 3.9** (Krupa & Melbourne [22], definição 2.3) Seja  $\Sigma$  um ciclo heteroclínico do sistema (2.1).

1. Diz-se que  $\Sigma$  é **Lyapunov estável** se para toda a vizinhança aberta  $U$  de  $\Sigma$ , existir uma vizinhança  $V \subseteq U$  de  $\Sigma$ , tal que para todas as trajetórias  $\phi(t, x)$  com  $x \in V$  se tem

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \phi(t, x) \in U.$$

2. Diz-se que  $\Sigma$  é **assintoticamente estável** se é estável e se existe uma vizinhança  $V$  de  $\Sigma$ , tal que

$$\forall x \in V, \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t, x), \Sigma) = 0.$$

3. Diz-se que  $\Sigma$  é **instável** se não é Lyapunov estável.

### 3.4 Redes Heteroclínicas e Dígrafos

Nesta secção será apresentada a relação entre redes heteroclínicas e dígrafos.

Ciclos e redes heteroclínicas costumam-se representar esquematicamente sob a forma de dígrafos (relembrar a definição de dígrafos na secção 2.5), onde as selas invariantes representam os vértices (ou nós).

Seja  $N = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$  o conjunto finito de equilíbrios hiperbólicos de (2.1). Se  $\xi_i$  e  $\xi_j$  são dois nós adjacentes do dígrafo, então existe a **conexão** de  $\xi_i$  para  $\xi_j$  ( $\xi_i, \xi_j \in N$ ) se

$$W^u(\xi_i) \cap W^s(\xi_j) \neq \emptyset,$$

conjunto que é denotado por

$$C_{ij} = W^u(\xi_i) \cap W^s(\xi_j).$$

O conjunto de conexões entre os equilíbrios em  $N$  é dado por

$$C(N) = \bigcup_{i \neq j} C_{ij}.$$

Assume-se que não há conexões homoclínicas, ou seja,  $C_{ii} = \{\xi_i\}, \forall i \in \{1, \dots, m\}$ .

#### 3.4.1 Rede Indecomponível e Dígrafo Transitivo

**Definição 3.10** (Ashwin et al. [6], capítulo 2) A rede  $\Sigma$  é **indecomponível** para a dinâmica de (2.1) se para todo  $\epsilon > 0$  e para quaisquer par de pontos  $a, b \in \Sigma$ , existe uma  $\epsilon$ -cadeia orientada de  $a$  para  $b$  dentro de  $\Sigma$ , onde a  $\epsilon$ -cadeia é a sequência de pontos  $\{x_k\}_{k=1}^n$  em  $\Sigma$  e de tempos  $\{t_k > 1\}_{k=1}^{n-1}$ , tal que

$$x_1 = a, x_n = b$$

e

$$\|\phi(t_k, x_k) - x_{k+1}\| < \epsilon$$

para  $k = 1, \dots, n - 1$  (ver Figura 3.6).

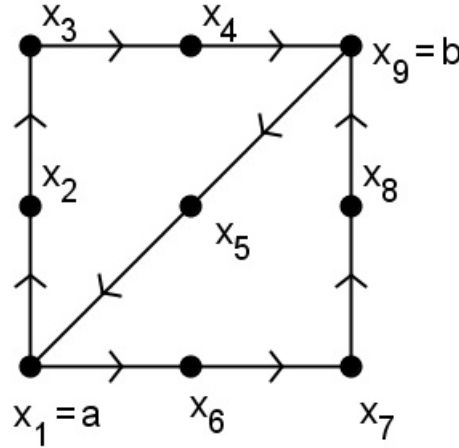


Figura 3.6: Exemplo de uma rede indecomponível ( $n = 9$ ).

O conjunto de pontos de equilíbrio em  $\Sigma$ , é denotado por  $N(\Sigma) = \{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ , e assume-se que é finito. A conexão de  $\xi_i$  para  $\xi_j$  na rede  $\Sigma$  é denotada por

$$C_{ij}(\Sigma) = C_{ij} \cap \Sigma.$$

Daqui em diante:

1. o grafo associado a uma determinada rede heteroclínica  $\Sigma$  será denotado por  $G(\Sigma)$ ;
2. a rede heteroclínica associada a um determinado grafo  $G$  (pode não ser única) será denotada por  $\Sigma_G$ .

Associado a qualquer rede heteroclínica  $\Sigma$ , existe um dígrafo  $G(\Sigma) = (V, E)$  com vértices  $V = \{v_1, \dots, v_k\}$  onde  $v_j$  corresponde a nó  $\xi_j \in N(\Sigma)$ , e o conjunto  $E$  de arestas orientadas, onde  $[v_i \rightarrow v_j] \in E$  corresponde a  $C_{ij}(\Sigma) \neq \emptyset$  com  $i \neq j$ . Para um determinado  $G(\Sigma)$ , o conjunto dos pontos de equilíbrio correspondente ao vértice  $v$  é denotado por  $N(v)$ . O conjunto de conexões de  $\xi_i$  para  $\xi_j$  em  $\Sigma$ , denotado por  $C_{ij}(\Sigma)$ , corresponde à aresta  $[v_i \rightarrow v_j]$ .

Um ciclo com  $m$  arestas diz-se um  $m$ -ciclo, um 3-ciclo é também chamado de **triângulo**. No contexto de dígrafos, reserva-se o termo  $m$ -ciclos para aqueles que são transitivos, ou seja, um circuito orientado passando por todos os vértices.

O dígrafo  $G(V, E)$  é **transitivo** se, para quaisquer dois vértices distintos  $v_i, v_j$ , existe um caminho orientado de  $v_i$  para  $v_j$  dentro de  $G(V, E)$  (ver Figura 3.7 (i)).

### 3.4.2 $\Delta$ -Clique, Vértice de Divisão e Nó de Divisão

**Definição 3.11** (Ashwin et al. [6], definição 2.2) Seja  $G = (V, E)$  um dígrafo associado ao conjunto de vértices  $V$  e conjunto de arestas  $E$ .

1. O dígrafo  $G$  é  **$\Delta$ -clique** se  $G$  é um triângulo que não é transitivo (ver Figura 3.7 (ii)).
2. Seja  $V' = \{w, v_1, \dots, v_k\}$  um subconjunto de todos os vértices distintos de  $V$  que são conectados a partir de  $w$ . Se as únicas arestas do dígrafo induzidas em  $V'$  tem a forma  $[w \rightarrow v_j]$  para  $j = 1, \dots, k$ , então diz-se que  $w$  é um **vértice de divisão** de ordem  $k \geq 2$  (ver Figura 3.8).
3. Diz-se que  $\xi$  é **nó de divisão** para  $\Sigma$  se o vértice correspondente for um vértice de divisão para  $G(\Sigma)$ .

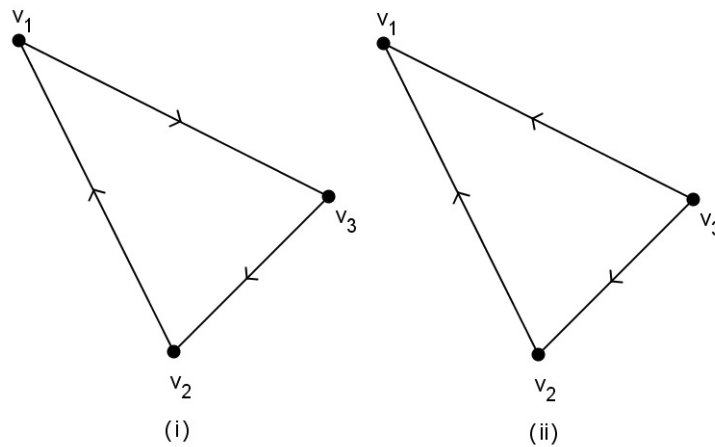


Figura 3.7: (i) Triângulo transitivo. (ii)  $\Delta$ -clique.

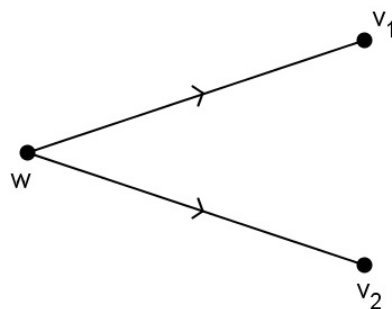


Figura 3.8: Exemplo de um vértice de divisão ( $w$ ).

### 3.4.3 Propriedades dos Nós das Redes Heteroclínicas

Nesta secção, serão introduzidas algumas propriedades de conexões entre nós dentro de redes heteroclínicas.

**Definição 3.12** (Ashwin et al.[6], definição 2.6) Considere  $\Sigma$  uma rede heteroclínica e  $\xi_i$  o nó dessa rede.

1. O nó  $\xi_i$  é **completo em**  $\Sigma$  se  $W^u(\xi_i) \subset \Sigma$  (ver Figura 3.9).
2. O nó  $\xi_i$  é **quase-completo em**  $\Sigma$  se  $W^u(\xi_i) \setminus \Sigma$  tem medida zero (com respeito a medida de Lebesgue).
3. O nó  $\xi_i$  é **uniforme em**  $\Sigma$ , se o conjunto das conexões ( $C_{ij}(\Sigma)$ ) têm a mesma dimensão ( $\dim(i)$ ) para todo  $j$ , tal que  $C_{ij}(\Sigma) \neq \emptyset$  (ver Figura 3.10 (i)).
4. O nó  $\xi_i$  é **exclusivo em**  $\Sigma$  se para todo  $j$  onde  $C_{ij}(\Sigma)$  é não vazia, e tem-se:

$$\overline{C_{ij}(\Sigma)} \cap N(\Sigma) = \{\xi_i, \xi_j\},$$

onde  $\overline{C_{ij}(\Sigma)}$  representa o fecho topológico de  $C_{ij}(\Sigma)$  (ver Figura 3.10 (i)).

5. A rede  $\Sigma$  é uma **rede completa/quase-completa/uniforme/exclusiva** se todos os nós são respetivamente **completos/quase-completos/uniformes/exclusivos**.
6. A rede  $\Sigma$  é **limpa** se é compacta e completa.

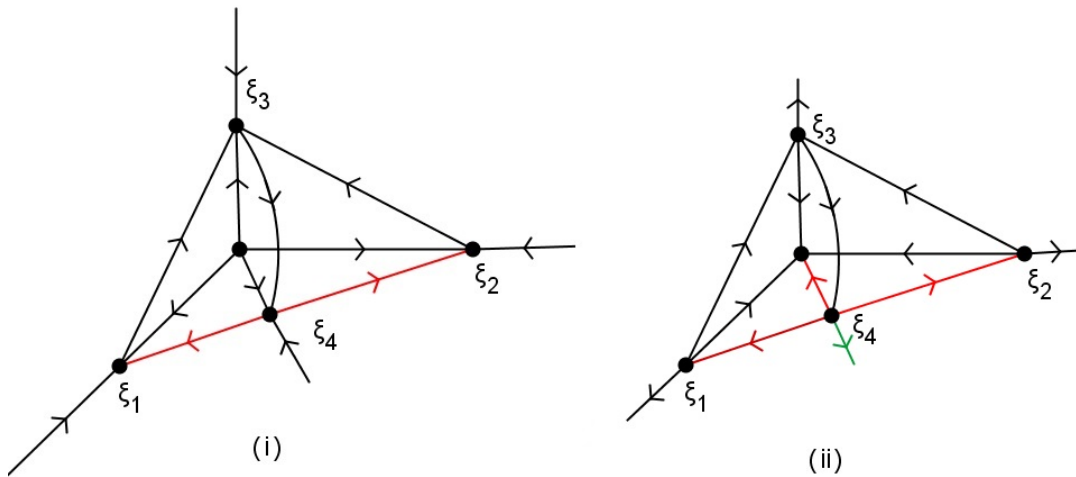


Figura 3.9: (i) Nó completo ( $\xi_4$ ) em  $\Sigma$ . (ii) Nó não completo ( $\xi_4$ ) em  $\Sigma$ .

Seja  $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$  uma rede com nós  $\xi_i, i = 1, 2, 3, 4$  e conexões entre eles em  $\mathbb{R}^3$ . O nó  $\xi_4$  (Figura 3.9 (i)) é completo em  $\Sigma$  porque a origem é instável e a variedade instável de dimensão um de  $\xi_4$  está contida em  $\Sigma$ . O nó  $\xi_4$  (Figura 3.9 (ii)) não é completo em  $\Sigma$  porque alguns pontos em  $W^u(\xi_4)$  “saem fora” de  $\Sigma$ .

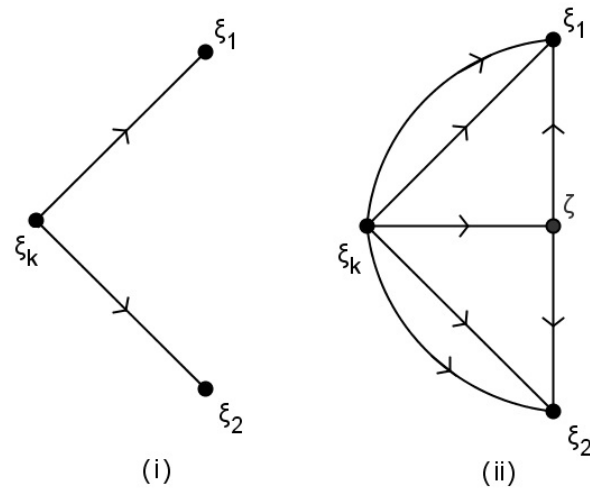


Figura 3.10: (i) Nó uniforme e exclusivo ( $\xi_k$ ). (ii) Nó não uniforme e não exclusivo ( $\xi_k$ ).

Os conceitos definidos anteriormente vão, em seguida, ser ilustrados e interpretados com base nos dígrafos (i) e (ii) da Figura 3.10.

- O nó de divisão  $\xi_k$  (Figura 3.10 (i)) fica completo com a inserção de um nó adicional  $\zeta$  e de conexões adicionais (Figura 3.10 (ii)).
- O nó  $\xi_k$  (Figura 3.10 (ii)) não é uniforme pois a dimensão das conexões de  $\xi_k$  pode ser um,  $[\xi_k \rightarrow \zeta]$ , ou dois,  $[\xi_k \rightarrow \xi_j]$ ,  $j = 1, 2$ .
- O nó  $\xi_k$  na Figura 3.10 (i) é exclusivo, mas na Figura 3.10 (ii) não é:  $\zeta \in \overline{C_{kj}}$ ,  $j = 1, 2$ .
- O nó  $\xi_k$  (Figura 3.10 (ii)) deixa de ser nó de divisão pois tem arestas múltiplas em  $C_{kj}$ ,  $j = 1, 2$ .

## Capítulo 4

# Realização de Redes Heteroclínicas Quase-completas

Neste capítulo, tal como já foi explicitado na introdução, será exibida a realização de um dígrafo transitivo satisfazendo condições específicas. Para uma certa escolha de parâmetros, a realização do dígrafo contém uma rede uniforme e quase-completa, e que é robusta sob certas perturbações equivariantes.

**Definição 4.1** (Ashwin et al. [6], capítulo 3) Considere-se  $G = (V, E)$  um dígrafo transitivo arbitrário (ver definição na secção 3.4.1). Diz-se que a dinâmica de (2.1) **realiza**  $G$  como uma rede heteroclínica  $\Sigma$  se existir uma rede heteroclínica  $\Sigma$  cujo dígrafo associado é  $G$ , isto é,  $G(\Sigma) = G$ .

Sem perder a generalidade, a rede heteroclínica  $\Sigma$  pode ser escolhida como rede heteroclínica maximal (ver Field [15]).

Há vários métodos propostos para o problema de realizar dígrafos (ver definição de dígrafos na secção 2.5) como redes heteroclínicas. O primeiro modo sistemático de construção de campo de vetores a partir de dígrafos foi feito em Ashwin & Postlethwaite [9, 10] e Field [14].

Segundo Ashwin & Postlethwaite [10], qualquer dígrafo sem 1 nem 2-ciclos pode ser realizado como uma rede heteroclínica  $\Sigma$  no conjunto de equilíbrios. O campo de vetores resultante em  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = \#N$  ( $N$  é o conjunto de nós de  $V$ ), é um campo de vetores  $\mathbb{Z}_2^n$ -equivariante e produz um equilíbrio em cada eixo coordenado e conexões em planos coordenados (método simplexo). O Teorema 4.2 irá mostrar que sob a hipótese adicional acerca da ausência de  $\Delta$ -cliques (ver definição na secção 3.4.2), com uma escolha apropriada dos parâmetros, isso pode ser feito de tal maneira que  $\Sigma$  é uma sub-rede uniforme e quase-completa e de uma rede fechada  $\Sigma'$ . Embora o campo de vetores  $f$  satisfaça as hipóteses de [10], a prova envolve a construção de **função do tipo Lyapunov** que usa hipóteses adicionais (Ashwin et al. [6], capítulo 3). O campo de vetores, sendo um campo gradiente, é Morse-Smale. A etapa final da prova consiste em adicionar ao conjunto inicial de pontos de equilíbrio ( $N$ ), um número

finito de pontos de equilíbrio que “quase” completam a rede inicial (ou seja, vai conter todas as variedades instáveis dos nós da rede). O resultado que se segue foi provado em [6].

**Teorema 4.2** Seja  $G = (V, E)$  um dígrafo de  $n$  vértices,  $V = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ , sem 1 nem 2-ciclos, e sem  $\Delta$ -cliques. Então existe um campo de vetores  $f$  em  $\mathbb{R}^n$  que é  $\mathbb{Z}_2^n$ -equivariante e que realiza  $G$  como uma rede  $\Sigma$ , associado ao conjunto de nós  $N = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ . O campo de vetores  $f$  pode ser escolhido de tal forma que existe um conjunto adicional de nós  $N'$  e uma rede heteroclínica fechada  $\Sigma'$ , associada a  $N \cup N'$ , tal que  $\Sigma$  é uma sub-rede uniforme e quase-completa de  $\Sigma'$ . Esta realização é robusta a perturbações  $\mathbb{Z}_2^n$ -equivariantes.

**Prova:** Considere-se um campo de vetores polinomial em  $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}_j = f_j(x) = x_j F_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

onde  $x_j$  representa a  $j$ -ésima componente de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$F_j(x) = 1 + \sum_{i=1}^n [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij}) - 1]x_i^2. \quad (4.2)$$

Se existe conexão de  $\xi_i$  para  $\xi_j$  em  $G$ , então  $A_{ij} = 1$  e  $A_{ij} = 0$  caso contrário, enquanto  $\delta_{ij}$  é o símbolo Kronecker, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e as constantes  $\epsilon$  e  $\eta$  satisfazem  $0 < \epsilon < 1$  e  $\eta > 0$ .

Em Ashwin & Postlethwaite [10], são apresentados dois métodos para mostrar que o dígrafo  $G$  pode ser realizado como uma rede heteroclínica. O método simplexo incorpora o dígrafo num simplexo, colocando os nós nos eixos coordenados. Este método realiza o dígrafo, desde que não tenha 1 nem 2-ciclos.

Como o campo de vetores (4.1) satisfaz as hipóteses (sem 1 nem 2-ciclos) de [10], apenas a última afirmação precisa de prova.

Seja  $N = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  o conjunto dos equilíbrios de (4.1) em cada um dos eixos coordenados de  $\mathbb{R}^n$ .

A condição de ausência de 1-ciclo pode ser expressa como  $A_{ii} = 0$ , 2-ciclos como  $A_{ij}A_{ji} = 0, \forall i, j$ , enquanto condição de ausência de  $\Delta$ -cliques significa que se  $A_{ij}A_{jk} = 1$ , então  $A_{ik} = 0$  para quaisquer  $i, j, k$ .

Seja

$$O_j = \{k \in \{1, \dots, n\} : A_{jk} = 1\}$$

um conjunto não vazio de índices correspondentes às direções “de saída” de  $j$ . A prova vai-se dividir em 4 etapas que se explicitam a seguir:

**Etapa 1: Existência de uma região absorvente para a dinâmica:** Considere-se

$$R = \|x\|^2 = \sum_j x_j^2$$

e calcule-se  $\frac{dR}{dt}$  para analisar a variação da componente radial de uma órbita em função da evolução do tempo  $t$ . Se  $\frac{dR}{dt} = 0$ , então a componente radial não varia nos pontos nos quais é calculada.

Procede-se a seguir ao cálculo de  $\frac{dR}{dt}$ .

$$\begin{aligned} R &= x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \\ \Rightarrow \frac{dR}{dt} &= 2x_1(x_1 F_1) + 2x_2(x_2 F_2) + \dots + 2x_n(x_n F_n) \\ &= 2x_1^2 F_1 + 2x_2^2 F_2 + \dots + 2x_n^2 F_n \\ &= \sum_j 2x_j^2 F_j(x) \\ &= \sum_j 2x_j^2 \left[ 1 + \sum_i [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij}) - 1]x_i^2 \right] \\ &= \sum_j 2x_j^2 + \sum_j 2x_j^2 \sum_i [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij})]x_i^2 - \sum_j 2x_j^2 \sum_i x_i^2 \\ &= 2R - 2R^2 + 2 \sum_{i,j} [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij})]x_i^2 x_j^2. \end{aligned}$$

Note-se que

$$-\eta \leq (\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij}) \leq \epsilon \quad [A_{ij} = \delta_{ij} = 0 \text{ e } A_{ij} = 1, \delta_{ij} = 0]$$

e, então,

$$-\eta R^2 \leq \sum_{i,j} [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij})]x_i^2 x_j^2 \leq \epsilon R^2,$$

o que implica

$$2R(1 - R - \eta R) \leq \frac{dR}{dt} \leq 2R(1 - R + \epsilon R). \quad (4.3)$$

O minorante e o majorante de  $\frac{dR}{dt}$  em (4.3) anulam-se em:

$$1 - R - \eta R = 0 \quad \text{e} \quad 1 - R + \epsilon R = 0$$

$$R(1 + \eta) = 1 \quad \text{e} \quad R(1 - \epsilon) = 1$$

$$R_1 = \frac{1}{1 + \eta} \quad \text{e} \quad R_2 = \frac{1}{1 - \epsilon},$$

o que quer dizer que as superfícies esféricas de raio  $R_1$  e  $R_2$  são invariantes pelo fluxo.

Uma vez que  $\frac{dR}{dt}(R_1) > 0$ , então as trajetórias com condição inicial na circunferência de raio  $R_1$  afastam-se da origem, aumentando a componente radial. Analogamente, tendo em conta que  $\frac{dR}{dt}(R_2) < 0$ , então as trajetórias com condição inicial na circunferência de raio  $R_2$  diminuem a componente radial.

Isso significa que existe uma região absorvente definida por  $R_1 < R < R_2$ , onde

$$\frac{1}{1 + \eta} = R_1 \leq R \leq R_2 = \frac{1}{1 - \epsilon}.$$

A região absorvente definida atrás está ilustrada na Figura 4.1.

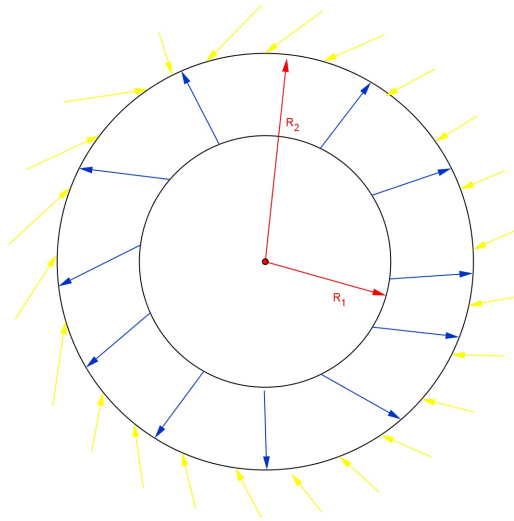


Figura 4.1: Ilustração de região absorvente em  $\mathbb{R}^n$ : com exceção de origem, todas as trajetórias são atraídas para esta região.

Portanto, para  $\eta > 0$  e  $0 < \epsilon < 1$ , existe uma coroa absorvente (ver Figura 4.1)

$$S = \left\{ x : \frac{1}{1+\eta} \leq \|x\|^2 \leq \frac{1}{1-\epsilon} \right\}. \quad (4.4)$$

Fixando  $j$  e definindo o subespaço vetorial invariante gerado pelos eixos coordenados que não recebem ligação de  $O_j$ :

$$\Omega_j = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = 0 \text{ se } k \notin O_j\}, \quad (4.5)$$

onde  $\xi_k$  não recebe ligação de  $\xi_j$ , então  $\xi_j$  possui ligação no subespaço invariante (ver Figura 4.2)

$$Q_j = \Omega_j \oplus \langle \xi_j \rangle. \quad (4.6)$$

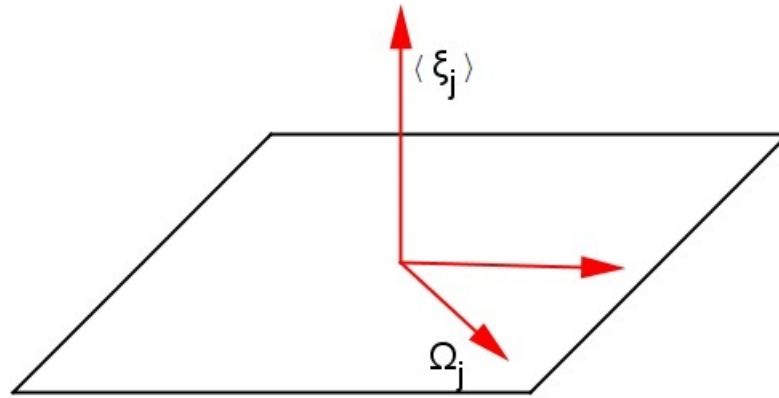


Figura 4.2: Subespaço vetorial invariante  $\Omega_j$  gerado pelos eixos coordenados que não recebem ligação de  $O_j$ . As setas não representam direção de saída do fluxo.

**Etapa 2:**  $\Omega_j$  atrai quase todas as condições iniciais em  $Q_j$  (ou seja, a medida de Lebesgue (ver definição na secção 2.4) das trajetórias que não são atraídas por  $\Omega_j$  é igual a zero). Na verdade, toda a trajetória em  $Q_j$  que não esteja no subespaço de dimensão um, definido por  $\langle \xi_j \rangle$ , está em  $\Omega_j$ . Definindo a função  $\Phi_j : Q_j \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$\tan \Phi_j = \frac{x_j^2}{\sum_{i \in O_j} x_i^2}, \quad \sum_{i \in O_j} x_i^2 \neq 0 \text{ porque } (0,0) \notin S,$$

tal como sugerido em (4.4), esta soma nunca se anula, e para qualquer  $x \in Q_j$  e  $i \in O_j$ , tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= x_j F_j(x) \\ &= x_j \left[ 1 + \sum_i [(\epsilon + \eta) A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij}) - 1] x_i^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x_j \left[ 1 + \sum_{k \in O_j} [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij}) - 1]x_k^2 + \sum_{k \notin O_j} [(\epsilon + \eta)A_{ij} - \eta(1 - \delta_{ij}) - 1]x_j^2 \right] \\
 &= x_j \left[ 1 + \sum_{k \in O_j} [(\epsilon + \eta) \cdot 0 - \eta(1 - 0) - 1]x_k^2 + \sum_{k \notin O_j} [(\epsilon + \eta) \cdot 0 - \eta(1 - 1) - 1]x_j^2 \right] \\
 &= x_j \left[ 1 + \sum_{k \in O_j} [-\eta - 1]x_k^2 - x_j^2 \right]
 \end{aligned}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_i &= x_i F_i(x) \\
 &= x_i \left[ 1 + \sum_{i \in O_j} [(\epsilon + \eta)A_{ji} - \eta(1 - \delta_{ji}) - 1]x_j^2 + \sum_{i \notin O_j} [(\epsilon + \eta)A_{ji} - \eta(1 - \delta_{ji}) - 1]x_i^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \sum_{i \neq k \in O_j} [(\epsilon + \eta)A_{ji} - \eta(1 - \delta_{ji}) - 1]x_k^2 \right] \right] \\
 &= x_i \left[ 1 + \sum_{i \in O_j} [(\epsilon + \eta) \cdot 1 - \eta(1 - 0) - 1]x_j^2 + \sum_{i \notin O_j} [(\epsilon + \eta) \cdot 0 - \eta(1 - 1) - 1]x_i^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ \sum_{i \neq k \in O_j} [(\epsilon + \eta) \cdot 0 - \eta(1 - 0) - 1]x_k^2 \right] \right] \\
 &= x_i \left[ 1 + [\epsilon - 1]x_j^2 - x_i^2 + \sum_{i \neq k \in O_j} [-\eta - 1]x_k^2 \right].
 \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\frac{d}{dt}[\tan \Phi_j] = \frac{d}{dt} \left[ \frac{x_j^2}{\sum_{i \in O_j} x_i^2} \right] = (1 + \tan^2 \Phi_j) \frac{d}{dt} \Phi_j,$$

decorre que

$$\frac{d}{dt} \Phi_j = \frac{1}{1 + \tan^2 \Phi_j} \frac{d}{dt}[\tan \Phi_j]$$

e, conseqüentemente, vem que

$$\begin{aligned}
(1 + \tan^2 \Phi_j) \frac{d}{dt} \Phi_j &= \left[ 1 + \left( \frac{x_j^2}{\sum_{i \in O_j} x_i^2} \right)^2 \right] \frac{d}{dt} \Phi_j \\
&= \left[ 1 + \frac{x_j^4}{\left( \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right)^2} \right] \frac{d}{dt} \Phi_j \\
&= \frac{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2} \frac{d}{dt} \Phi_j \\
&= \frac{2x_j \dot{x}_j \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right] - 2x_j^2 \sum_{i \in O_j} x_i \dot{x}_i}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2}.
\end{aligned}$$

Isso significa que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \Phi_j &= 2 \frac{x_j \dot{x}_j \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right] - x_j^2 \sum_{i \in O_j} x_i \dot{x}_i}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4} \\
&= 2 \frac{x_j^2 \left[ 1 + \sum_{i \in O_j} (-\eta - 1) x_k^2 - x_j^2 \right] \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right] - x_j^2 \sum_{i \in O_j} x_i^2 \left[ 1 + (\epsilon - 1) x_j^2 + \sum_{i \neq j \in O_j} (-\eta - 1) x_j^2 - x_i^2 \right]}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4} \\
&= 2 \frac{x_j^2 \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \left[ 1 + \sum_{i \in O_j} (-\eta - 1) x_k^2 - x_j^2 \right] - \left[ 1 + (\epsilon - 1) x_j^2 + \sum_{i \neq j \in O_j} (-\eta - 1) x_j^2 - x_i^2 \right] \right]}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x_j^2 \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 [-\epsilon x_j^2 + (-\eta - 1)x_i^2 + x_i^2] \right] \\
 = & 2 \frac{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4} \\
 & x_j^2 \sum_{i \in O_j} x_i^2 (\eta x_i^2 + \epsilon x_j^2) \\
 = & -2 \frac{\sum_{i \in O_j} x_i^2 (\eta x_i^2 + \epsilon x_j^2)}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4}.
 \end{aligned}$$

Para qualquer  $\eta > 0$  e  $\epsilon > 0$ ,  $\frac{d}{dt}\Phi_j \in \mathbb{R}_0^-$  se  $x \neq 0$  exceto quando  $x_i^2 = 0$ ,  $i \in O_j$ . Como  $\tan \Phi_j = \frac{x_j^2}{x_i^2 + \dots + x_k^2}$  pode ser vista como uma norma, e como  $\frac{d}{dt}\Phi_j < 0$ , então  $\Phi_j$  decresce com  $t$ . Isto implica que  $\tan \Phi_j$  é monótona decrescente com  $t$ , convergindo para 0, para quaisquer condições iniciais em  $Q_j \cap S$ , exceto quando  $x_i^2 = 0$ ,  $i \in O_j$ . Isso implica que todas as condições iniciais, exceto as que se encontram nos eixos  $x_j$ , convergem para  $\Omega_j$ , razão pela qual quase todas as trajetórias de  $Q_j$  são atraídas para  $\Omega_j$ .

**Etapa 3: A dinâmica restrita a  $\Omega_j$  é um fluxo gradiente** (ver definição na secção 2.3):

Para  $x \in \Omega_j$ , considere-se

$$R = \sum_{i \in O_j} x_i^2.$$

Seja

$$\begin{aligned}
 V_j &= -\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}\eta \sum_{k \in O_j} x_k^2 \left[ \sum_{l \in O_j, l \neq k} x_l^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in O_j} x_i^2 + \frac{1}{4} \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + \frac{1}{4}\eta \sum_{k \in O_j} x_k^2 \left[ \sum_{l \in O_j, l \neq k} x_l^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i \in O_j} x_i^2 + \frac{1}{4} \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + \frac{1}{4}\eta \sum_{i \in O_j} x_i^2 \left[ \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \right] + \frac{1}{4}\eta \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right].
 \end{aligned}$$

Note-se que para qualquer  $i \in O_j$  e  $x \in \Omega_j$ , tem-se

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial x_i} V_j &= \frac{1}{2} [2x_i] - \frac{1}{2} \sum_{i \in O_j} x_i^2 [2x_i] - \frac{1}{4} \eta \left[ 2x_i \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 + \sum_{k \neq i \in O_j} 2x_i x_k^2 \right] \\
&= x_i - \sum_{i \in O_j} x_i^2 x_i - \frac{1}{4} \eta \left[ 4x_i \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \right] \\
&= x_i - R x_i - \eta x_i \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \\
&= x_i \left[ 1 - R - \eta \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \right] \\
&= x_i \left[ 1 - \sum_{i \in O_j} x_i^2 - \eta \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \right] \\
&= x_j F_j(x) \\
&= \dot{x}_j.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Portanto, o fluxo de (4.1) é gradiente com potencial associado  $V_j$  quando restrito a  $\Omega_j$ ,  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Etapa 4: Comportamento da sub-rede uniforme e quase completa  $\Sigma$ :** Para concluir a prova, observe-se que os únicos mínimos do campo  $V_j$  em  $\Omega_j$  correspondem a equilíbrios estáveis do campo de vetores que estão em  $x = \xi_i$  onde  $i \in O_j$  (ver exemplo na Figura 5.5). Esses equilíbrios são Lyapunov estáveis, o que significa que são mínimos quadráticos de  $V_j$  em  $\Omega_j$ . Os outros pontos de equilíbrios de  $V_j$  correspondem a selas ou repulsores de (4.1) em  $\Omega_j$ . Isso resulta, por construção, que o fluxo em  $\Omega_j$  é Morse-Smale (ver definição na secção 2.3). Define-se  $N'$ , conjunto de nós de divisão (ver definição na secção 3.4.2), como uma união de todos os pontos de equilíbrios de  $V_j$  e define-se a rede heteroclínica  $\Sigma'$  como o fecho topológico das variedades instáveis de  $\xi_j$  associada a  $N \cup N'$ , tal que  $\Sigma$  é uma sub-rede de  $\Sigma'$ .

A sub-rede  $\Sigma$  é quase-completa (ver definição na secção 3.4.3), uma vez que  $Q_j$  contém o conjunto  $W^u(\xi_j)$  e quase todas as trajetórias em  $Q_j$  convergem para um equilíbrio em  $\Omega_j^1$ . Consequentemente, ao juntar todos os pontos de equilíbrios  $N'$  em  $Q_j$ , garante-se que todo o conjunto  $W^u(\xi_j)$  consiste na conexão entre equilíbrios da rede. Mais precisamente, qualquer condição inicial em  $Q_j$  (ver (4.7)), satisfazendo

$$T_i = \{x \in Q_j : x_i^2 > x_k^2 \text{ para todo } k \in O_j\}$$

<sup>1</sup>Esta informação irá ser a razão pela qual se vai assumir, no capítulo 6, que existe, em  $\Sigma$ , uma medida suportada em  $W^u(\xi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

é assintótica para  $\xi_i$ . Noutros termos, se na região  $Q_j$ , o valor próprio de expansão (parte real positiva) na direção  $\xi_i$  for maior do que o da direção  $\xi_k$ , então quase todas as trajetórias convergem para  $\xi_i$ .

A sub-rede  $\Sigma$  é uniforme (ver definição na secção 3.4.3), pois, sendo o conjunto  $W^u(\xi_j)$  transversal à direção radial  $\langle \xi_j \rangle$ , quase todas as trajetórias em  $W^u(\xi_j)$  convergem para um dos equilíbrios estáveis  $\xi_i$ , garantindo que  $C_{ij}(\Sigma)$  tem dimensão igual à do  $W^u(\xi_j)$ , isso porque se  $\dim(C_{ij}) < \dim(W^u(\xi_j))$ , então a medida de Lebesgue de  $C_{ij}$  em  $W^u(\xi_j)$  é zero e, pela continuidade absoluta de medida (ver definição na secção 2.4), a medida de  $C_{ij}$  também é zero.  $\square$

**Nota:** A rede  $\Sigma'$ , além de fechada, fica limpa (ver definição na secção 3.4.3) se todos os nós de divisão  $N'$  tiverem variedades instáveis que estejam totalmente contidas em  $Q_j$  para alguns  $j$ .

## Capítulo 5

# Rede Kirk-Silber: Exemplo

Neste capítulo, vai-se ilustrar a construção efetuada no capítulo 4 com uma rede bem conhecida, a rede Kirk-Silber [20], cujo dígrafo associado é o que está esquematizado na Figura 5.1. De acordo com o Teorema 4.2, o campo de vetores resultante que realiza a rede heteroclínica é  $\mathbb{Z}_2^4$ -equivariante, onde o grupo atua como reflexão em cada plano coordenado.

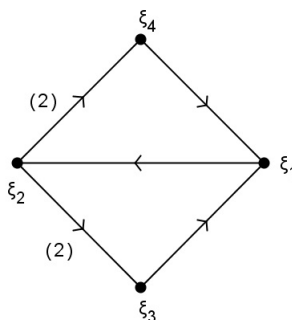


Figura 5.1: Dígrafo associado à rede Kirk-Silber [20].

Antes de prosseguir, iremos definir, de forma **informal**, competição entre ciclos dentro de uma rede associado ao fluxo da equação (2.1). Seja  $\Sigma$  uma rede heteroclínica composta por dois (ou mais) ciclos heteroclínicos distintos, sejam eles  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Diz-se que há uma **competição entre os ciclos**  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  se arbitrariamente perto de  $\Sigma$  existem trajetórias, soluções de (2.1), tais que para todo o tempo:

1. permanecem perto de  $\Sigma$ ;
2. orbitam (com ou sem regularidade) em torno de  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ .

Noutros termos, existe competição entre  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  se existem trajetórias que permanecem perto da rede  $\Sigma$  (para todo o tempo) e não são **atraídas** para um só ciclo.

### 5.1 Descrição da Rede Kirk-Silber

Kirk & Silber [20] investigaram a competição entre dois ciclos heteroclínicos com quatro equilíbrios  $\xi_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , associados ao campo de vetores em  $\mathbb{R}^4$  equivariante por um grupo

de Lie compacto, gerado por reflexões nos eixos coordenados em  $x_j = 1$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ . A rede heteroclínica possui dois ciclos heteroclínicos:

$$\Sigma_1 : \xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow \xi_3 \rightarrow \xi_1 \quad \text{e} \quad \Sigma_2 : \xi_1 \rightarrow \xi_2 \rightarrow \xi_4 \rightarrow \xi_1,$$

cada um estruturalmente estável, no que diz respeito às perturbações que preservam a simetria de reflexão. Tal como sugerido no dígrafo da Figura 5.1, os ciclos de dimensão um partilham a conexão  $[\xi_1 \rightarrow \xi_2]$ , tal que

$$\dim(W^u(\xi_3)) = \dim(W^u(\xi_4)) = 1 \text{ e a variedade instável de } \xi_2 \text{ tem dimensão dois.}$$

Em  $\xi_2$ , o valor próprio de expansão na direção  $\xi_3$  é assumido como sendo maior do que o da direção  $\xi_4$  ( $e_{23} > e_{24}$ ). Neste caso, as soluções que deixam  $\xi_2$  na direção  $\xi_4$  passam por uma bacia em forma de cúspide adjacente à conexão  $[\xi_1 \rightarrow \xi_2]$ , onde ambos os ciclos podem ser atratores [20]. A Figura 5.2 ilustra algumas das principais características dos ciclos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ , no que respeita às ligações associadas, a saber:

- (i) o ciclo  $\Sigma_1$  está contido no espaço invariante  $x_4 = 0$ ;
- (ii) o ciclo  $\Sigma_2$  está contido no espaço invariante  $x_3 = 0$ .

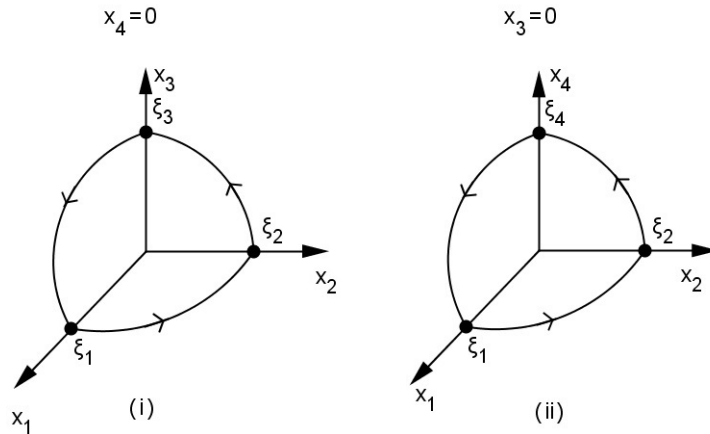


Figura 5.2: (i), (ii) Ilustração dos ciclos  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$  da rede Kirk-Silber nos planos coordenados  $x_4 = 0$  e  $x_3 = 0$ , respetivamente.

Tal como já foi referido, o fluxo mantém-se para perturbações equivariantes que mantêm a simetria  $\mathbb{Z}_2$ . Ambos os ciclos de dimensão um podem ser atratores [20].

## 5.2 Aplicação do Teorema 4.2

Nesta secção, queremos encontrar um campo de vetores com uma rede heteroclínica  $\Sigma$  que realiza o dígrafo  $G$ ,  $\Sigma_G$ . Como pudemos constatar anteriormente, esta realização já existe na literatura, tendo sido já provado que a rede  $\Sigma_G$  não é completa; para o ser, precisa de um ponto de equilíbrio adicional (Ashwin & Chossat [7]). As principais características dessa rede estão ilustradas na Figura 5.3:

- (i) a dinâmica está contida no plano  $x_1 = x_2 = 0$ ;
- (ii) a rede heteroclínica é fechada topologicamente e contém os dois ciclos. Note-se que existe um ponto de equilíbrio de sela extra,  $\zeta$ , cuja variedade instável tem dimensão dois.

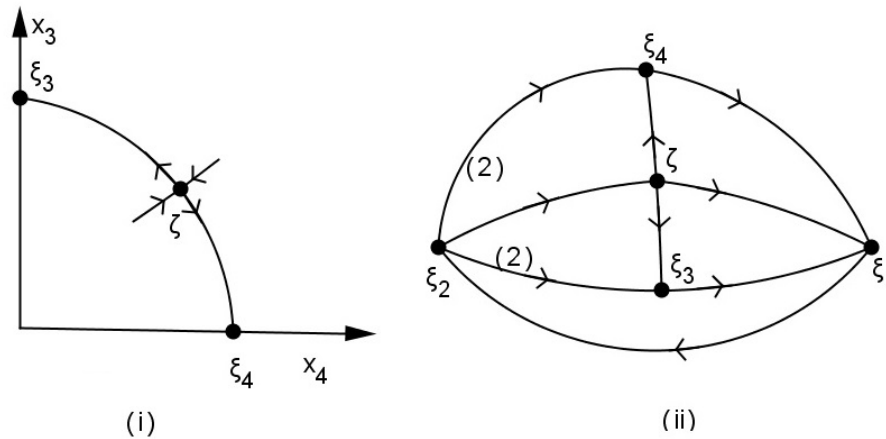


Figura 5.3: (i) Dinâmica no plano  $x_1 = x_2 = 0$ , envolvendo um ponto de equilíbrio de sela  $\zeta$ , com  $\dim(W^u(\zeta)) = 2$ . (ii) Rede heteroclínica fechada topologicamente que contém os dois ciclos,  $\Sigma_1$  e  $\Sigma_2$ . Os números entre parênteses correspondem à **dimensão da conexão** quando esta é maior que um.

O método desenvolvido no capítulo 4 (Teorema 4.2), será aplicado à rede de Kirk-Silber (ver Figura 5.4), à luz do artigo do Ashwin et al. [6].

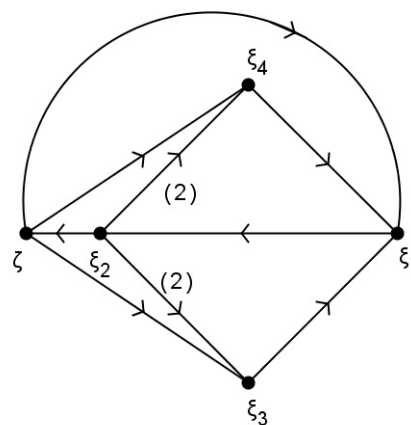


Figura 5.4: Dígrafo associado à rede Kirk-Silber, após a inserção de um nó extra,  $\zeta$ , de forma a torná-la quase-completa.

Aplicando o modelo de construção usado na prova do Teorema 4.2, pode-se escrever (ver pp.28)

$$\dot{x}_i = x_i \left[ 1 + [\epsilon - 1]x_j^2 - x_i^2 + \sum_{i \neq k \in O_j} [-\eta - 1]x_k^2 \right], \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

onde  $0 < \epsilon < 1$  e  $\eta > 0$ .

Mais especificamente

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1[1 - |x|^2 + \epsilon(x_3^2 + x_4^2) - \eta x_2^2] \\ \dot{x}_2 &= x_2[1 - |x|^2 + \epsilon x_1^2 - \eta(x_3^2 + x_4^2)] \\ \dot{x}_3 &= x_3[1 - |x|^2 + \epsilon x_2^2 - \eta(x_1^2 + x_4^2)] \\ \dot{x}_4 &= x_4[1 - |x|^2 + \epsilon x_2^2 - \eta(x_1^2 + x_3^2)]. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Este sistema possui quatro equilíbrios  $\xi_j$ ,  $j \in \{1, \dots, 4\}$ , cada um nos eixos coordenados.

Uma vez mais, usando (4.5), tem-se

$$\Omega_1 = \{(0, a, 0, 0)\},$$

$$\Omega_2 = \{(0, 0, a, b)\},$$

$$\Omega_3 = \Omega_4 = \{(a, 0, 0, 0)\},$$

e  $Q_j = \Omega_j \oplus \langle \xi_j \rangle$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , significa que se  $x \in Q_2$ , então  $x = (0, x_2, x_3, x_4)$ . Consequentemente, se  $x \in Q_2$ , tem-se

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= x_2[1 - |x|^2 - \eta(x_3^2 + x_4^2)] \\ \dot{x}_3 &= x_3[1 - |x|^2 + \epsilon x_2^2 - \eta x_4^2] \\ \dot{x}_4 &= x_4[1 - |x|^2 + \epsilon x_2^2 - \eta x_3^2]. \end{aligned}$$

Os únicos atratores em  $Q_2$  são  $\xi_3$  e  $\xi_4$  porque são os únicos que “**recebem**” ligação de  $O_2$ .

Tendo em conta que (ver pp.32)

$$\tan \Phi_j = \frac{x_j^2}{\sum_{i \in O_j} x_i^2}$$

e que

$$\frac{d}{dt} \Phi_j = -2 \frac{x_j^2 \sum_{i \in O_j} x_i^2 (\eta x_i^2 + \epsilon x_j^2)}{\left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]^2 + x_j^4},$$

decorre que

$$\tan \Phi_2 = \frac{x_2^2}{x_3^2 + x_4^2},$$

e

$$\frac{d}{dt} \Phi_2 = -2x_2^2 \frac{\epsilon(x_3^2 + x_4^2)x_2^2 + \eta(x_3^4 + x_4^4)}{x_2^2 + (x_3^2 + x_4^2)^2}$$

em  $Q_2$  está diminuindo para  $x_2 = 0$ , exceto quando  $x_3^2 + x_4^2 = 0$ . Pode-se então escrever

$$V_j = -\frac{1}{2}R + \frac{1}{4}R^2 + \frac{1}{4}\eta \sum_{i \in O_j} x_i^2 \left[ \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \right] + \frac{1}{4}\eta \sum_{k \neq i \in O_j} x_k^2 \left[ \sum_{i \in O_j} x_i^2 \right]$$

donde se tem

$$\begin{aligned} V_2(0, 0, x_3, x_4) &= -\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4}\eta \sum_{i=3} x_i^2 \left[ \sum_{k=4} x_k^2 \right] + \frac{1}{4}\eta \sum_{k=4} x_k^2 \left[ \sum_{i=3} x_i^2 \right] \quad (5.2) \\ &= -\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4}\eta x_3^2 x_4^2 + \frac{1}{4}\eta x_4^2 x_3^2 \\ &= -\frac{R}{2} + \frac{R^2}{4} + \frac{1}{2}\eta x_3^2 x_4^2. \end{aligned}$$

Quando restrito a  $\Omega_2 = \{0, 0, x_3, x_4\}$ , tem-se

$$\dot{x}_3 = -\frac{\partial V_2}{\partial x_3}$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{\partial V_2}{\partial x_4},$$

originando um fluxo gradiente em  $\Omega_2$ , com quase todas as trajetórias convergindo para  $\xi_3$  e  $\xi_4$  (mínimos de  $V_2$ , ver em Figura 5.5).

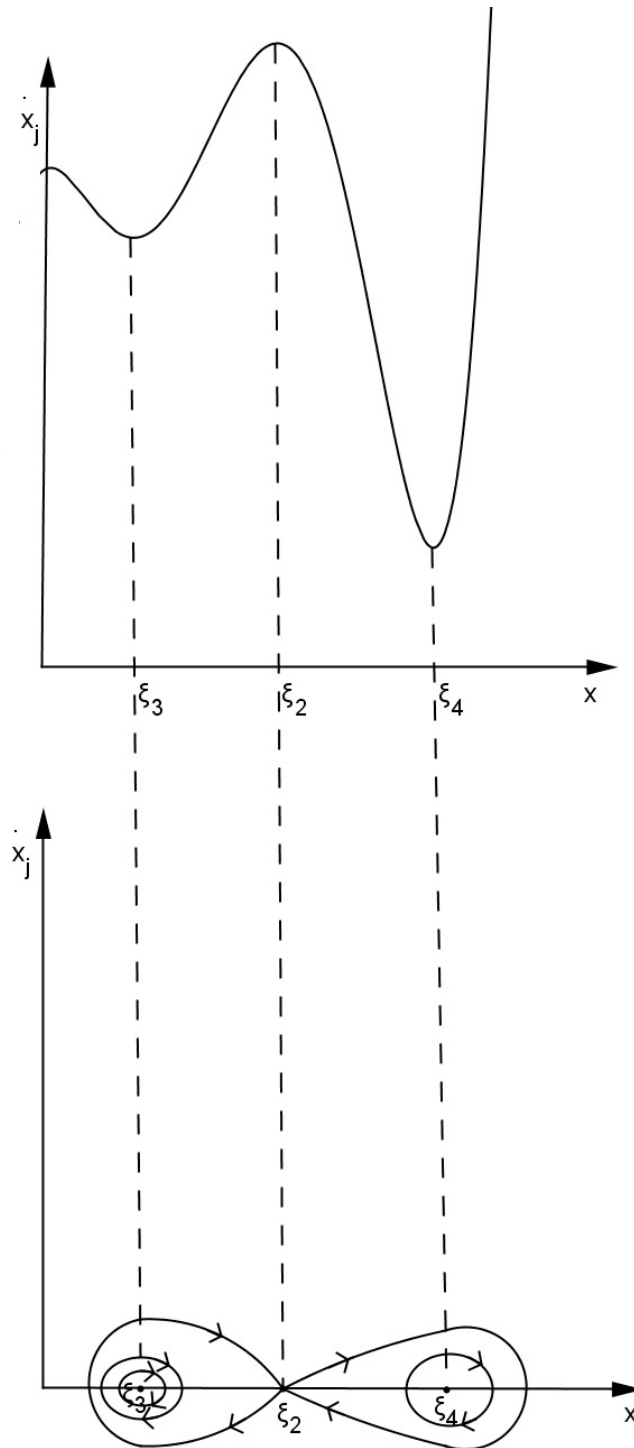


Figura 5.5: Esquemática de um plausível diagrama de fase.

Restringindo o fluxo a  $\Omega_2$ , adiciona-se um nó de divisão  $\zeta = (0, 0, x_3, x_4)$ , tal que  $x_3^2 = x_4^2 = \frac{1}{2 + \eta}$ . O espaço instável do nó  $\zeta$  em  $\Omega_2$  contém a direção  $\xi_1$ , em que a variedade instável de  $\zeta$  não está contida em  $Q_2$ . Juntando o nó de divisão  $\zeta$  às conexões da rede heteroclínica induzida pela Figura 5.1, faz com que esta nova rede, da qual a original é uma sub-rede, se torne quase-completa.

## Capítulo 6

# Abordagem Probabilística da Dinâmica da Rede

Dada uma rede heteroclínica atratora associada à equação diferencial (2.1), coloca-se a questão de saber se existe algum conjunto para o qual a maior parte das trajetórias (no que respeita à medida de Lebesgue) converge. Pretende-se, portanto, saber qual o **atrator estatístico** (Karabacak & Ashwin [19]) associado à rede.

Neste capítulo, será usada a noção de processo **Markoviano** (cadeia de Markov) de primeira ordem com o parâmetro de **tempo discreto** e o espaço de estados finito como um modelo de dinâmicas probabilísticas na rede heteroclínica  $\Sigma$  para dar mais detalhes sobre a **importância da dinâmica da sub-rede** uniforme e quase-completa.

### 6.1 Processo de Markov na Rede

Nesta secção, vai-se explorar o conceito de convergência, sob o ponto de vista **probabilístico**. Vai-se admitir que o leitor possui alguns conhecimentos sobre variáveis aleatórias. Endereçamos o leitor a (Ross [27], secção 2.1) para um aprofundamento dos conhecimentos sobre o tema.

**Definição 6.1** (Ross [27], capítulo 2) Um **processo estocástico**  $X = \{X_t : t \in T\}$  é uma família de **variáveis aleatórias**, onde o índice  $t$  representa o tempo e  $T$  representa o conjunto dos índices do processo ou espaço de parâmetros.

O processo  $X_t$  refere-se ao estado de processo no tempo  $t$ . O espaço de estados de um processo estocástico é definido como o conjunto de todos os possíveis valores que as variáveis aleatórias  $X_t$  podem assumir. Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias que descreve a evolução ao longo do tempo de algum processo (físico).

**Definição 6.2** (Ross [27], capítulo 4) Seja  $X = \{X_n : n = 0, 1, \dots\}$  um processo estocástico de tempo discreto. Se  $X_n = i$ , diz-se que o processo está no estado  $i$  no tempo  $n$ . Supondo que sempre que o processo estiver no estado  $i$ , há uma probabilidade fixa de  $i$  para  $j$  ( $P_{ij}$ ) de que ele estará no estado  $j$ . Diz-se que  $X_n$  é uma **cadeia de Markov** se

$$P\{X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} = P_{ij}. \quad (6.1)$$

para todos os estados  $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in \mathbb{N}$  e  $\forall n \geq 0$ .

A condição (6.1) pode ser interpretada como a distribuição condicional de qualquer estado futuro  $X_{n+1}$  dados os estados passados  $X_0, X_1, \dots, X_{n-1}$  e o estado presente  $X_n$  é **independente dos estados passados** e depende apenas do estado presente.

O valor  $P_{ij}$  representa a probabilidade do processo, quando, no estado  $i$ , fizer a transição para o estado  $j$ . Como as medidas de probabilidades são não negativas e como se admite que o processo faz uma transição para algum estado, tem-se que

1.  $P_{ij} \geq 0$ ,
2.  $i, j \geq 0$ ,
3.  $\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i \in \mathbb{N}_0$ .

Seja a rede heteroclínica  $\Sigma = C(N) \cup N$  (ver secção 3.4). Para cada nó  $\xi_i \in N, i = 1, \dots, n$ , considere-se daqui em diante a medida de probabilidade  $\rho_i(x)$ <sup>1</sup> que é suportada<sup>2</sup> em  $W^u(\xi_i)$  e absolutamente contínua (ver definição na secção 2.4) com respeito à medida de Lebesgue.

Daqui em diante, o processo de Markov de tempo discreto será definido como

$$\Xi = \{\xi_n \in N \cup \{e\}\}, n \in \mathbb{Z} \text{ em } \Sigma,$$

onde  $e$  representa o estado de “sair da vizinhança da rede”. Define-se a probabilidade de transição de  $\xi_j$  para  $\xi_k$  por

$$P((\xi_{n+1}) = \xi_k | \xi_n = \xi_j) = \rho_j(C_{jk}(\Sigma)). \quad (6.2)$$

Assume-se que

$$P(\xi_{n+1} = e | \xi_n = e) = 1,$$

ou seja, assume-se que quando a trajetória escapa num dos equilíbrios, **não volta à rede**.

Note-se que se um nó não for quase-completo, as trajetórias do processo poderão “sair da vizinhança da rede” a partir desse nó. Definindo

$$P(\xi_{n+1} = e | \xi_n = \xi_j) = 1 - \sum_k \rho_j(C_{jk}(\Sigma)),$$

então, essa expressão pode ser diferente de zero.

<sup>1</sup>Medida de probabilidade no espaço de fase  $\mathbb{R}^n$ .

<sup>2</sup>Diz-se que  $\rho_i(x)$  é suportada em  $W^u(\xi_i)$  se qualquer conjunto com medida  $\rho_i(x)$  positiva interseca  $W^u(\xi_i)$ .

A proposição a seguir mostra que, nos casos em que esse processo quase certamente (ver Definição 6.4 (1.)) permanece na vizinhança da rede, quase todas as órbitas são atraídas para uma **sub-rede**  $\Sigma' \subset \Sigma$  **uniforme e quase-completa**.

**Proposição 6.3** Seja  $\Sigma$  uma rede heteroclínica associada aos nós  $N(\Sigma)$ , suportando o processo de Markov  $\Xi$ . Se  $\Xi$  é um processo estocástico associado a uma dinâmica que evita escape (quase certamente), então,  $\Sigma$  é quase-completa. Além disso, existe uma sub-rede uniforme e quase-completa  $\Sigma'$ .

**Prova:** Por definição,  $\Xi$  tem apenas probabilidade positiva nas transições que correspondem ao subconjuntos de medidas positivas de  $W^u(\xi_j), \forall j$ . Se  $\forall n, P(\xi_{n+1} = e | \xi_n = \xi_j) = 0$ , então,  $\sum_k \rho_j(C_{jk}(\Sigma)) = 1, \forall j$  e, portanto,  $\Sigma$  é quase-completa. Note-se que por (6.2) implica que o conjunto completo de conexões  $C_{jk}$ , tal que  $\rho(C_{jk}) > 0$ , tenha dimensão igual à do  $W^u(\xi_j)$ . Isso ocorre porque se o conjunto  $R \subset W^u(\xi_j)$  é tal que  $\dim(R) < \dim(W^u(\xi_j))$ , então a medida de Lebesgue de  $R$  em  $W^u(\xi_j)$  é zero e, pela continuidade absoluta de  $\rho_j$ ,  $\rho_j(R)$  também é zero. Portanto, todos os conjuntos completos de conexões de  $\xi_j$  têm a mesma dimensão ( $\xi_j$  é uniforme) e pertencem à mesma sub-rede uniforme e quase-completa.  $\square$

## 6.2 Dinâmica Estocástica: Breve Abordagem

Nesta secção, vai-se discutir a dinâmica estocástica ( $\alpha \gtrsim 0$ ) à luz do artigo de Ashwin et al. [6].

O processo de Wiener, também conhecido como Movimento Browniano, é um tipo específico de processo estocástico de Markov, que tem sido utilizado pela física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a uma grande quantidade de pequenos choques moleculares. Também é um processo muito usado para perceber a aleatoriedade que está relacionada a alguns fenômenos físicos e económicos [24]. Este processo é um processo estocástico com três propriedades que serão descritas a seguir.

**Definição 6.4** (Sobczyk [28], capítulo I) Um processo estocástico contínuo  $W_t, t \in [0, \infty)$  diz-se um **processo de Wiener** ou **movimento Browniano** se:

1. O processo  $W_0 = 0$  ocorre quase certamente, isto é,  $P(W_0 = 0) = 1$ .
2. Para qualquer  $0 \leq s < t$ , o incremento  $W_t - W_s$  tem uma distribuição normal com média zero e variância  $t - s$ , isto é,  $W_t - W_s$  segue  $N(0, t - s)$  ou

$$P(a \leq W_t - W_s \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx.$$

3. O processo  $W_t$  tem incrementos independentes, isto é, para quaisquer  $0 < t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , os incrementos  $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  são independentes.

**Definição 6.5** (Sobczyk [28], capítulo III) Seja

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (6.3)$$

diz-se que a equação (6.3) é uma **equação diferencial estocástica** se:

$$a(t) = f(t) + \alpha(t)\xi(t), \quad (6.4)$$

onde  $\alpha(t)$  é o ruído (ver Armbruster et al. [4] para mais detalhes sobre o ruído) e  $\xi(t)$  representa o processo estocástico contínuo. Endereçamos o leitor para (Sobczyk [28], capítulo III) para mais informações sobre equações diferenciais estocásticas.

Considere-se agora, uma equação diferencial estocástica

$$\dot{x} = f(x) + \alpha W_t, \quad (6.5)$$

onde  $W_t$  é o processo de Wiener padrão de dimensão  $n$ . Relativamente à (6.5), no caso da rede Kirk-Silber, várias simulações de uma trajetória em  $Q_2$ , numa vizinhança de  $\xi_2$ , são apresentadas em [6], Fig.7, para o caso de  $\epsilon = 0.02$ ,  $\eta = 0.05$  e diferentes valores de  $\alpha$ :

1. Para  $\alpha = 0$ , sabe-se que:

- é um processo determinístico, onde o campo  $f$  realiza o dígrafo da Figura 5.4 como uma rede heteroclínica atratora para o sistema (5.1);
- $\xi_2$  é um nó de divisão (Figura 5.4), onde é assumido que  $e_{23} > e_{24}$ , então, genericamente quase todas as trajetórias seguem o ciclo associado à conexão  $[\xi_2 \rightarrow \xi_3]$ ;
- a região  $Q_2$  contém  $W^u(\xi_2)$  mas não contém  $\xi_1$ . Nas simulações, evidencia-se que a trajetória retorna várias vezes a  $Q_2$ , sugerindo visitar quase todas as possíveis saídas de  $\xi_2$  (note que  $\dim(W^u(\xi_2)) = 2$ ).

2. Para  $\alpha \gtrsim 0$ , as simulações sugerem que as visitas de trajetórias estão **concentradas** nas ligações heteroclínicas unidimensionais [4], mas ainda outras regiões de possíveis saídas de  $\xi_2$  são visitadas com medida de probabilidade diferente de zero.

# Capítulo 7

## Discussão

Nesta tese, explicitam-se os passos de construção de um campo de vetores que realiza um dado dígrafo  $G$  (sem 1, 2-ciclos nem  $\Delta$ -cliques). Noutros termos, constrói-se um campo de vetores que possui uma rede heteroclínica atratora, cujo dígrafo associado é  $\Sigma$ . O fluxo associado ao campo de vetores possui uma rede  $\Sigma' \supset \Sigma$ , que é quase-completa, em que as variedades instáveis de todos os nós da rede estão em  $\Sigma'$ . A construção de  $\Sigma'$  é feita adicionando pontos de equilíbrio extra que capturam as variedades instáveis dos nós, cujas variedades instáveis fogem de  $\Sigma$ . A construção foi ilustrada com um exemplo de uma rede heteroclínica bem conhecida, a rede Kirk-Silber, que, para ser realizada de forma consistente, precisa de um nó extra adicional. Verifica-se, assim, que o método de construção é consistente com os resultados já existentes na literatura.

Introduzindo um processo Markoviano, prova-se ainda a existência de uma sub-rede  $\Sigma'' \subset \Sigma'$ , que “funciona” como atrator estatístico: quase todas as trajetórias (com respeito à medida de Lebesgue) são atraídas para  $\Sigma''$ , uma sub-rede de  $\Sigma'$ . Foram descritas ainda algumas simulações numéricas levadas a cabo por Ashwin et al. [6], *Journal of Nonlinear Science* (2020) que sugerem a existência de uma rede (quase-completa e uniforme) como uma descrição ótima para (pequenas) perturbações estocásticas do sistema determinístico original.

Esta tese segue de perto o artigo de Ashwin et al. [6], sendo que alguns problemas ainda permanecem em aberto, dentre os quais:

1. Será o Teorema 4.2 válido se relaxarmos as hipóteses de não existência de 1, 2-ciclos e  $\Delta$ -cliques?
2. Será possível construir uma rede onde se possa optar por nós (linearização do campo de vetores só tem valores próprios reais) ou focos (linearização do campo de vetores tem valores próprios complexos)?
3. Será possível reduzir  $\Sigma'$  a uma variedade central que contenha a dinâmica “importante” da equação?
4. Será a dinâmica do fluxo associado à equação diferencial estocástica descrita pelo processo de Markov (apoiada pelas simulações)?

5. Será possível efetuar algum tipo de relação entre perturbações de dinâmica determinística com a “média” (autónoma) de perturbação estocástica?

Tratam-se de problemas em aberto que serão alvo de investigação em trabalhos futuros.

## Capítulo 8

# Bibliografía

- [1] Aguiar MAD, Castro SBS, Labouriau IS. *Simple vector fields with complex behaviour*. Int. Jour. of Bifurcation and Chaos 2006; 16 (2): 369-381.
- [2] Aguiar MAD, Labouriau IS, Rodrigues AAP. *Switching near a network of rotating nodes*. Dynam. Sys. 2010; 25 (1): 75-95.
- [3] Araújo V, Pacifico MJ. *Three-dimensional flows*. 1<sup>st</sup> ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 2010.
- [4] Armbruster D, Stone E, Kirk V. *Noisy heteroclinic networks*. Chaos 2003; 13 (1): 71-79.
- [5] Arnold VI. *Ordinary differential equations*. 3<sup>rd</sup> ed. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag; 1992.
- [6] Ashwin P, Castro SBS, Lohse A. *Almost complete and equable heteroclinic networks*. J Nonlinear Sci 2020; 30 (1): 1-22.
- [7] Ashwin P, Chossat P. *Attractors for robust heteroclinic cycles with continua of connections*. J Nonlinear Sci 1998; 8 (2): 103-129.
- [8] Ashwin P, Field MJ. *Heteroclinic networks in coupled cell systems*. Arch. Rational Mech. Anal. 1999; 148 (2): 107-143.
- [9] Ashwin P, Postlethwaite C. *Designing heteroclinic and excitable networks in phase space using two populations of couple cells*. J Nonlinear Sci 2016; 26 (2): 345-364.
- [10] Ashwin P, Postlethwaite C. *On Designing heteroclinic networks from graphs*. Physica D 2013; 265: 26-39.
- [11] Banyaga A, Hurtubise D. *Lectures on Morse homology*. 1<sup>st</sup> ed. Dordrecht: Springer Science + Business Media Dordrecht; 2004.
- [12] Bick C. *Heteroclinic dynamics of localized frequency synchrony: heteroclinic cycles for small populations*. J Nonlinear Sci 2019; 29 (4): 2547-2570.

- [13] Cioabă SM, Murty MR. *A first course in graph theory and combinatorics*. 1<sup>st</sup> ed. Nova Delhi: Hindustan Book Agency (India); 2009.
- [14] Field MJ. *Heteroclinic networks in homogeneous and heterogeneous identical cell systems*. J Nonlinear Sci 2015; 25 (3): 779-813.
- [15] Field MJ. *Lectures on bifurcations, dynamics and symmetry*. 1<sup>st</sup> ed. Danvers: CRC Press; 1996.
- [16] Field MJ. *Patterns of desynchronization and resynchronization in heteroclinic networks*. Nonlinearity 2017; 30 (2): 516-557.
- [17] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer DG. *Singularities and groups in bifurcation theory* (Vol. II). 1<sup>st</sup> ed. Nova York: Springer-Verlag; 1998.
- [18] Hirsch MW, Smale S, Devaney RL. *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*. 1<sup>st</sup> ed. San Diego: Academic Press; 1974.
- [19] Karabacak O, Ashwin P. *On Statistical attractors and the convergence of time averages*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 2011; 150 (2): 353-365.
- [20] Kirk V, Silber M. *A Competition between heteroclinic cycles*. Nonlinearity 1994; 7 (6): 1605-1621.
- [21] Komarov MA, Osipov GV, Suykens JAK. *Sequentially activated groups in neural networks*. EPL (Europhysics Letters) 2009, 86 (6): 60006.
- [22] Krupa M, Melbourne I. *Asymptotic stability of heteroclinic cycles in systems with symmetry*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. 1995; 15 (1): 121-148.
- [23] Podvigina O, Castro SBS, Labouriau IS. *Asymptotic stability of robust heteroclinic networks*. Nonlinearity 2020; 33 (4): 1757-1788.
- [24] Rabinovich M, Volkovskii A, Lecanda P, Huerta R, Abarbanel HDI, Laurent G. *Dynamical encoding by networks of competing neuron groups: winnerless competition*. Phys. Rev. Lett. 2001; 87 (6): 068102.
- [25] Perko L. *Differential equations and dynamical systems*. 3<sup>rd</sup> ed. Nova York: Springer-Verlag; 2001.
- [26] Rodrigues AAP. *Exemplos de ciclos e redes heteroclínicas em sistemas de equações diferenciais com simetria* [dissertação]. Porto: Faculdade de Ciências da Universidade do Porto; 2006.
- [27] Ross SM. *Introduction to probability models*. 6<sup>th</sup> ed. San Diego: Academic press; 1972.
- [28] Sobczyk K. *Stochastic differential equations: with applications to physics and engineering*. 1<sup>st</sup> ed. Warsaw, Poland: Springer Science + Business Media Dordrecht; 1991.

[29] Sotomayor J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. 1<sup>st</sup> ed. Rio de Janeiro: IMPA; 1979.

[30] Taylor SJ. *Introduction to measure and integration*. 2<sup>nd</sup> ed. Nova York: Cambridge University Press; 1973.

[31] Walters P. *An introduction to ergodic theory*. 2<sup>nd</sup> ed. Nova York: Springer-Verlag New York, inc; 1982.